Abi 18 Lsg Ana II

A 1 $f(x) = \sqrt{3x-5}$

Für den maximalen Definitionsbereich muss der Radikand 0 oder positiv sein:

$3x - 5 \geq 0$

$3x \geq 5$

$x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow D = [\frac{5}{3}; \infty[$

Gleichung Tangente an der Stelle $x = 3$ und $y = f(3) = \sqrt{3 \cdot 3 - 5} = \sqrt{4} = 2$

Bestimmung der Steigung der Tangente über den Wert der Ableitungsfunktion an der Stelle 3:

$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

$f'(3) = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = m$

Zwischenergebnis: $y_T = \frac{3}{4} \cdot x + t$ t ist noch gesucht.

Bestimme t durch Einsetzen des Punktes der Tangente (3|2) ergibt folgende Gleichung:

$2 = \frac{3}{4} \cdot 3 + t$

$\frac{8}{4} = \frac{9}{4} + t \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$

Tangentengleichung:

$y_T = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

2 $f(x) - x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

Nachweis Eigenschaft (1): $f'(0) = -3 \cdot 0 + 18 \cdot 0 - 15 \checkmark$

- " - (2): Für diese Eigenschaft muss der Funktionswert und der Wert der 1. Ableitung jeweils Null betragen:

$f(5) = -125 + 9 \cdot 25 - 15 \cdot 5 - 25 = -125 + 225 - 75 - 25 = 0 \checkmark$

$f'(5) = -3 \cdot 25 + 18 \cdot 5 - 15 = -75 + 90 - 15 = 0\checkmark$

- " - (3): Zeige, dass die Steigung der Tangente mit der Steigung des Graphen im Punkt übereinstimmt, und dass beide Funktionen den gleichen y-Wert besitzen:

$m_T = -36; \qquad f'(-1) = -3 - 18 - 15 = -36\checkmark$

$x = -1 \Rightarrow y_t = -36 \cdot (-1) - 36 = 0 \qquad f(-1) = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$

3 F hat insgesamt genau drei Nullstellen. Die erste Nullstelle entspricht der unteren Integrationsgrenze, denn $\int\limits_3^3 f(t)dt = 0$. Betrachtet man x-Werte größer drei so fällt auf, dass der Graph der Parabel vom Positiven ins Negative wechselt, sodass sich die entsprechenden Flächeninhalte (ober- und unterhalb der x-Achse) mit genügend großem x genau einmal ausgleichen. Dies ergibt eine weitere Nullstelle. Mit der gleichen Argumentation kann man die x-Werte kleiner drei betrachten (Symmetrie); es ergibt sich also eine weitere Nullstelle für $x < 1,5$.

4 a) $a > 0 \Rightarrow$ der Exponent der höchsten Potenz ist ungerade und der Koeffizient ist positiv. Also gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} = +\infty$$

Dies trifft nur für Abbildung 2 zu.

b) $f_a'(x) = \frac{3}{a}x^2 - 1$
$f_a'(3) = \frac{3}{a} \cdot 9 - 1 = 0 \Rightarrow a = 27$

B 1 a) $f(x) = a \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x-10)$, a ist zu bestimmen.

Setze P(1|2) ein: $f(1) = a \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-9) = 2 \Rightarrow 36a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{18}\checkmark$

$f(x) = \frac{1}{18}x\ (x-5) \cdot (x-10) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 15x^2 + 50x)$

b) $f'(x) = \frac{1}{18} \cdot (3x^2 - 30x + 50)$

$f''(x) = \frac{1}{18} \cdot (6x - 30)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 30 = 0 \Rightarrow x = 5\checkmark$

$f(5) = 0$

Da die Krümmung durch eine Gerade beschrieben wird, die genau bei x=5 ihre Nullstelle hat, ergibt sich dort ein Vorzeichenwechsel, die Krümmung ändert also ihre Richtung. Deshalb handelt es sich um einen Wendepunkt.

Zur Ermittlung der Tangentengleichung bestimmt man zuerst die Steigung mit Hilfe von $f'(5)$:

$f'(5) = \frac{1}{18} \cdot (3 \cdot 25 - 30 \cdot 5 + 50) = \frac{1}{18} \cdot (-25) = -\frac{25}{18} \approx 1,39$

Zur Ermittlung von t kann man den Geradenpunkt (5|0) verwenden:

$0 = -\frac{25}{18} \cdot 5 + t \Rightarrow t = \frac{125}{18} \approx 6,94$

$y_T = -\frac{25}{18}x + \frac{125}{18}$

c) $g(x) = \frac{1}{18} \cdot x(x^2 - 25) = \frac{1}{18} \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x+5)$

Die Nullstellen liegen also bei $x_1 = -5; x_2 = 0$ und $x_3 = +5$, also um 5 in negativer x-Richtung verschoben.

$g(-x) = \frac{1}{18}((-x)^3 + 25x) = -\frac{1}{18}(x^3 - 25x) = -g(x)$ (Punktsymmetrie zum Ursprung).

Bei Verschiebung des Graphen von g um 5 in positive x-Richtung wird das Zentrum ebenfalls um 5 in positiver x-Richtung verschoben. Also ist G_f punktsymmetrisch zu (5|0).

d) $F_1(x) = \int_1^x f(t)dt$

Eine Nullstelle ergibt sich an der Stelle x = 1. Da die obere und untere Grenze der Integralfunktion hier übereinstimmen.
Bei Integration in positiver Richtung wird zur bis x=5 reichenden positiv orientierten Fläche negativ orientierte Fläche hinzuaddiert. Die Flächeninhalte gleichen sich exakt bei x=9 aus (Siehe Punktsymmetrie der vorherigen Aufgabe).

e) Im weiteren Verlauf gleicht sich der negativ orientierte Flächeninhalt $\int_9^{10} f(x)dx$ mit den positiven Anteilen $x > 10$ aus, eine weitere Nullstelle für die Integralfunktion ist die Folge.

f) Die dargestellte Funktion ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion. Alle Stammfunktionen sind von Grad 4, können also höchstens vier Nullstellen besitzen.

g) Gesucht ist der Term einer Sinusfunktion $t(x) = a \cdot sin(\frac{\pi}{5}x)$

und $\int\limits_0^5 a \cdot sin(\frac{\pi}{5}x)dx = \frac{625}{72}$

$[-\frac{5}{\pi} \cdot a \cdot cos(\frac{\pi}{5}x)]_0^5 = \frac{625}{72}$

$-\frac{5}{\pi} \cdot a \cdot (-1) - (-\frac{5}{\pi} \cdot a) \cdot 1 = \frac{10}{\pi}a = \frac{625}{72}$

$\Rightarrow a = \pi \cdot \frac{625}{720} \approx 2{,}73$

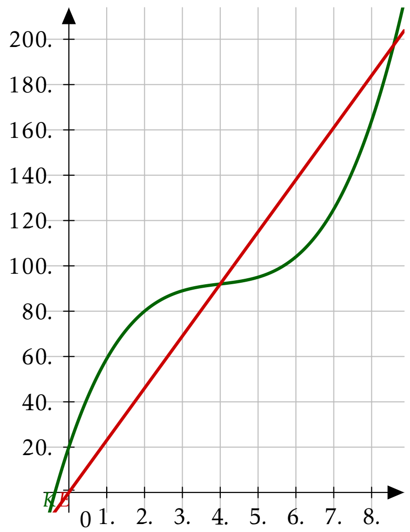
2 a) aa $x = 7$, also 7 Kubikmeter.

bb K(x) steigt streng monoton: Mit mehr Kubikmetern Flüssigkeit steigen auch die Kosten.

b) $G(x) = 23x - x^3 + 12x^2 - 50x - 20$

$G(4) = 23 \cdot 4 - 4^3 + 12 \cdot 4^2 - 50 \cdot 4 - 20 = 0\checkmark$

c) Graph



Der Bereich liegt zwischen 4 und 8,5 Kubikmeter.

d) $G'(x) = -3x^2 + 24x - 27$

$G'(x) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 12 \cdot 27}}{-6}$

$x_1 \approx 1{,}35$ (Verlust)

$x_2 \approx 6,65$

Bei etwa $6,65 m^3$ wird der maximale Gewinn gemacht.