Abi 17 Lsg Ana II

A 1 a) Der Nenner darf nicht Null werden. Deshalb gilt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich für x = 0: $f(0) = \frac{3^2}{1} = 9$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse ergeben sich aus $y = f(x) = 0$. Dazu muss der Zähler Null sein.

In diesem Fall gilt das nur für $x = -3$.

b) Überführen von $x + 7 + \frac{16}{x-1}$ in f(x):

Erweitern der ersten zwei Summanden: $\frac{(x+7)(x-1)}{x-1} + \frac{16}{x-1} = \frac{x^2+6x-7}{x-1} + \frac{16}{x-1}$

Auf einem Bruchstrich zusammenfassen: $\frac{x^2+6x-7+16}{x-1} = \frac{x^2+6x+9}{x-1} = \frac{(x+3)^2}{x-1}$ ✓

Die Gerade $x + 7$ stellt eine schräge Asymptote an G_f dar.

2 $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$

a) $2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$

$2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 1$

$e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x = ln(2^{-1})$

$x = -2ln(2)$

b) $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

$f'(0) = e^0 = 1$

Die Tangente schneidet die y-Achse bei $y = 1$ im 45^o-Winkel, also die x-Achse bei $x = -1$.

3 a) Aus dem Graphen: Periode 10; Amplitude 2; Verschiebung in positiver y-Richtung: 3; Berechnung der Parameter: $p = 3; q = 2$;

$\frac{\pi}{r} \cdot 10 = 2\pi \Rightarrow \frac{10}{r} = 2 \Rightarrow r = 5$

b) $h(x) = 3 + 2sin(\frac{\pi}{5}(x-2))$

4 $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$

a) Mittlere Änderungsrate: $\frac{n(2)-n(0)}{2-0} = \frac{392-500}{2} = -54$

Mittlere Änderung der Pollenzahl: $54 \cdot h^{-1}$

b) Momentane Änderungsrate: $n'(t) = 6t - 60$

$n'(t) = -30 = 6t - 60 \Rightarrow t = 5$

Nach 5h beträgt die momentane Pollenänderungsrate $-30h^{-1}$.

B 1 $f(x) = 2e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1)$

a) Ableitung mit der Produktregel:

$f'(x) = -2e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1) + 2e^{-x} \cdot (-2e^{-x})$

$= 2e^{-x} \cdot (-2e^{-x} + 1 - 2e^{-x})$

$= 2e^{-x} \cdot (1 - 4e^{-x})$✓

b) $f'(x) = 0$

$0 = 2e^{-x} \cdot (1 - 4e^{-x}) \Rightarrow$

$1 - 4e^{-x} = 0$

$1 = 4e^{-x}$

$\frac{1}{4} = e^{-x}$

$ln\frac{1}{4} = -x$

$-ln\frac{1}{4} = x$

$ln4 = x$ (Stelle mit waagerechter Tangente)
Art:

VZT	$x < ln4$	$x = ln4$	x > ln 4
$f'(x)$	-	0	+
G_f	$\searrow$	TIP	$\nearrow$

$f(ln4) = -\frac{1}{4}$

Der Extrempunkt ist ein Minimum bei $T(ln4|-\frac{1}{4})$

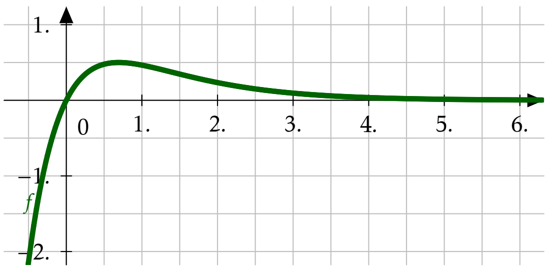
c) Zu zeigen: $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = -2e^{-x} + 4e^{-2x} = 2e^{-x}(2e^{-x} - 1)\checkmark$

$\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{2e^{-x}}_{\to 0} - \underbrace{2e^{-2x}}_{\to 0} = 0\checkmark$

d) $f(x)$ wechselt bei $ln2$ das Vorzeichen und besitzt also im Intervall $]-\infty; ln2]$ nur positive und im Intervall $[ln2;\infty[$ ausschließlich negative Funktionswerte. Daher muss der Graph der Stammfunktion für x-Werte kleiner $x = ln2$ steigen und für größere x-Werte fallen. Also besitzt er sein Maximum bei $x = ln2$.

Die Untersuchung zum Wendepunkt wurde bereits in Teilaufgabe b) durchgeführt. Es handelt sich um eine Nullstelle von $f'(x)$ mit Vorzeichenwechsel. Da $F''(x) = f'(x)$ bedeutet dies für den Graph von $F(x)$ einen Krümmungswechsel, also einen Wendepunkt.

e) 

f) Flächeninhalt des Dreiecks: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot ln2 \cdot 2 = ln2 \approx 0,693$

Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse: $A_f = \int\limits_0^{ln2} f(x)dx = F(ln2) - F(0) =$ $2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$

Prozentualer Unterschied: $\frac{A_\Delta - A_f}{A_f} \approx \frac{0,19}{0,5} = 0,38$

Das Dreieck hat einen um 38 % größeren Flächeinhalt.

g) Durch die untere Grenze 0 besitzt F_o von x dort eine Nullstelle. Für F(x) gilt:

$F(0) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$

Beide Stammfunktionen von x besitzen an der gleichen Stelle eine Nullstelle. Da sie sich nur durch eine Verschiebung in y-Richtung unterscheiden können, müssen sie identisch sein.

$F_o(2)$ beschreibt den Wert des orientierten Flächeninhaltes zwischen G_f und der x-Achse. Dieser ist im Intervall zwischen 0 und $ln2$ positiv, im Intervall zwischen $ln2$ und 2 negativ. Die Fläche unterhalt der x-Achse ist allerdings um $\approx 0,234$ kleiner als der positive Flächeninhalt.

h) Eine Integralfunktion muss eine Nullstelle besitzen. Nachdem $F(x)$ als höchsten Wert $0,5$ besitzt (Teilaufgabe d) kann eine zu F mehr als $0,5$ nach unten verschobene Stammfunktion keine Nullstelle mehr besitzen, also auch keine Integralfunktion zu f sein. Beispiel:

   $F_{-1}(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} - 1$ hat keine Nullstelle, ist also keine Integralfunktion zu f.

2 a) $B(2) = 0,018;$ $\quad F(2) \approx 0,234;$ $\quad P(2) \approx 0,748$

b) $t = ln2 \cdot 6 \cdot 60 \approx 4,16$ nach etwa 250 Sekunden ist der Anteil am höchsten.

c) Es muss gelten: $F(x) = \frac{1}{3} = B(x)$

   $e^{-2x} = \frac{1}{3} \Rightarrow -2x = ln\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}ln\frac{1}{3}$ in B(x):

   $B(-\frac{1}{2}ln\frac{1}{3}) = 2e^{\frac{1}{2}ln\frac{1}{3}} - 2e^{ln\frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}} - 2 \cdot \frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}\checkmark$

d) P(x) ist ein Term in dem ausschließlich negative Exponentialfunktionen mit Asymptote y = 0 von 1 subtrahiert werden. Da für diese gilt $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, wird P(x) den Wert 1 annehmen. Das bedeutet, dass nach langer Zeit nur noch Blei-Atome im Behälter zu finden sein werden.