Abi 16 Lsg Geo II

A 1 a) $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 6 = 0;\qquad P(1|0|2);\qquad Q(5|2|6)$

Richtungsvektor der Geraden PQ: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u}$, die Vektoren sind linear abhängig. ✓

b) Auch auf F muss der Verbindungsvektor senkrecht stehen. Darüber hinaus muss aber der Mittelpunkt von P und Q in der Ebene F enthalten sein. Also kann man die Normalenform ansetzen:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \tfrac{1}{2}(\vec{P} + \vec{Q})\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Dies ist eine Gleichung von F.

2 a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{CA} = \vec{A} - \vec{C} = 2 \cdot \vec{AB} \Rightarrow \vec{C} = \vec{A} - 2 \cdot \left(\vec{B} - \vec{A}\right)$

$$\vec{C} = 3\vec{A} - 2\vec{B} = \begin{pmatrix} -6+8 \\ 3-0 \\ 12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -4+2 \\ 1-0 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Geradengleichung: $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-4+2)^2 + (1-0)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$$

Also liegt B auf der Geraden und ist von A genau 3 Einheiten entfernt. Gesucht ist eine Gerade mit Aufpunkt B und einem Richtungsvektor senkrecht zu $\vec{AB}$. Suche als Richtungsvektor einen, dessen Skalarprodukt mit $\vec{AB}$ Null ergibt:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{und als Gerade: } g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B a) Berechne die Länge der Vektoren $\overrightarrow{W_1K_0}$ und $\overrightarrow{W_1K_1}$. Die Längendifferenz muss von den Winden abgerollt werden.

$$K_0 = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 25 \end{pmatrix}; \qquad K_1 = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{W_1K_0}\right| = \sqrt{(45-0)^2 + (60-0)^2 + (25-30)^2} \approx 75,17$$

$$\left|\overrightarrow{W_1K_0}\right| = \sqrt{(45-0)^2 + (60-0)^2 + (6-30)^2} \approx 78,75$$

$$d = 78,75 - 75,17 = 3,58$$

b) $$g : \vec{X} = \vec{K_1} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 + 3\lambda \\ 60 + 20\lambda \\ 6 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der Geraden zeigt, dass sich die Höhe der Kamera verändert ($x_3 = 2$). Der Punkt K_2 ist erreicht, wenn die Kamera 10m über dem Boden schwebt, also wenn für die Höhe der Geraden gilt:

$$x_3 : 10 = 6 + \lambda \cdot 2 \Rightarrow \lambda = 2$$

Für $\lambda = 2$ hat die Kamera die richtige Höhe, also ihren Zielpunkt erreicht. Also gilt:

$$K_2 = \begin{pmatrix} 45 + 3 \cdot 2 \\ 60 + 20 \cdot 2 \\ 6 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix} \checkmark$$

c) Zu berechnen ist der Winkel zwischen zwei Vektoren.

Senkrecht nach unten: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor von K_2 nach B: $\vec{v_2} = \vec{B} - \vec{K_2} = \begin{pmatrix} 40 - 51 \\ 105 - 100 \\ 0 - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{v_1} \circ \vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|} = \frac{10}{\sqrt{246}} \approx 0,64 \Rightarrow \alpha \approx 50,4^o$$

d) Ermitteln der Gleichung:

Zwei Vektoren in der Ebene: $\vec{u}' = \overrightarrow{W_1W_2} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \overrightarrow{W_1K_2} = \begin{pmatrix} 51-0 \\ 100-0 \\ 10-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ -20 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$E: x_2 + 5x_3 + c = 0 \qquad W_1$ einsetzen: $0 + 5 \cdot 30 + c = 0 \Rightarrow c = -150$

Ebenengleichung:

$E: x_2 + 5x_3 - 150 = 0 \qquad \checkmark$

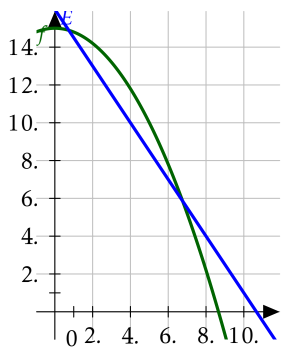
Welche x_3-Koordinate muss ein Punkt besitzen, der in der Ebene liegt und die Koordinaten $x_1 = 50; \qquad x_2 = 70$ hat? Setze in die Ebenengleichung ein und berechne x_3:

$0 \cdot 50 + 1 \cdot 70 + 5x_3 - 150 = 0$

$5x_3 = 80 \Rightarrow x_3 = 16$

Der Punkt der Ebene über der Position (50|70|0) des Fußballplatzes befindet sich in 16m Höhe. Der Punkt H befindet sich nur in 15m Höhe. er liegt also unterhalb der Kameraebene.

e) Möglicher Verlauf von f und E:



Obwohl der Startpunkt und der höchste Punkt der Flugbahn unterhalb von E liegen, kann es Kreuzungspunkte geben.