

## Abi 16 Lsg Ana I

A 1  $f : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(x)}$

$$x > 0, \text{ wegen } \ln(x). \quad 1 - \ln(x) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \ln(x) \Rightarrow e^1 \geq x \Rightarrow x \in ]0; +e]$$

b)  $\sqrt{1 - \ln(x)} = 2$

$$1 - \ln(x) = 4$$

$$-3 = \ln(x)$$

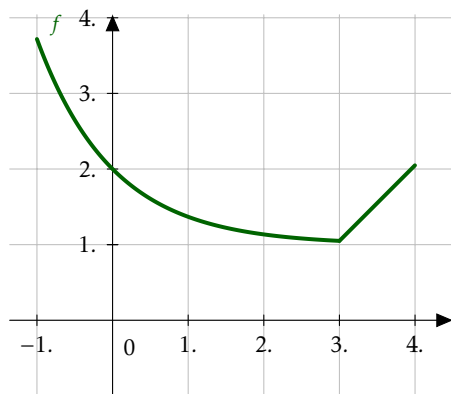
$$x = e^{-3}$$

Probe:

$$\sqrt{1 - \ln(e^{-3})} = \sqrt{1 - (-3)} = \sqrt{4} = 2 \checkmark$$

2  $f(-x) = (-x)^2 \cdot \sin(-x) = x^2 \cdot (-\sin(x)) = -x^2 \cdot \sin(x) = -f(x) \Rightarrow$  Punktsymmetrie.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) = 0, \text{ da } f(x) \text{ punktsymmetrisch.}$$



- 4 a) Bei Hoch und Tiefpunkten ist die Tangentensteigung 0, das heißt bei  $x=1$  und  $x=4$  gilt  $f'(x) = 0$ . Die Ableitung einer Funktion ergibt eine Funktion zweiten Grades, deren Graph ist eine Parabel. Außerdem gilt bei  $x=1$ , dass der Graph rechtsgekrümmt ist (Hochpunkt), also  $f''(1) = (f')'(1) < 0$ , also ist der Graph der Ableitungsfunktion bei  $x=1$  fallend. Umgekehrt ist der Graph der Ableitungsfunktion bei  $x=4$  steigend, also muss sich dazwischen das Minimum der quadratis-

chen Funktion befinden. Somit ist die Parabel nach oben geöffnet.

- b) Da sich die Nullstellen der Ableitungsfunktion bei  $x=1$  und  $x=4$  befinden, muss der Scheitelpunkt bei  $(1+4)/2 = 2,5$  sein. Im Scheitelpunkt gilt  $(f')'(2,5) = f''(2,5) = 0$ . Nachdem aus 4a) bekannt ist, dass der  $G_f$  für  $x < 2,5$  linksgekrümmt ist und für  $x > 2,5$  rechtsgekrümmt, muss  $x = 2,5$  ein Wendepunkt sein.

- 5 a) Durch Kästchenzählen kommt man auf etwa 9,5 Kästchen, also  $A \approx 9,5 \cdot \frac{1}{4} = 2,125$

b)  $F'(x) = 0,5$

c)  $\int_3^b f(x)dx = F(b) - F(3) = F(b) - 0 = F(b)$ .

B 1  $f : x \mapsto e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

- a) Schnittpunkt mit der y-Achse:  $f(0) = 1 + 1 = 2$

$f(x) > 0$ , da die Funktionswerte von  $e^{\frac{1}{2}x} > 0$  und diejenigen von  $e^{-\frac{1}{2}x}$  auch.

- b)  $f(-x) = e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} = f(x)$ , also symmetrisch zur y-Achse.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x}}_{\rightarrow 0} = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (wegen Symmetrie)

c)  $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4} \cdot f(x)$$

Da  $f(x) > 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{4}f(x) > 0$  also linksgekrümmt.

d)  $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$

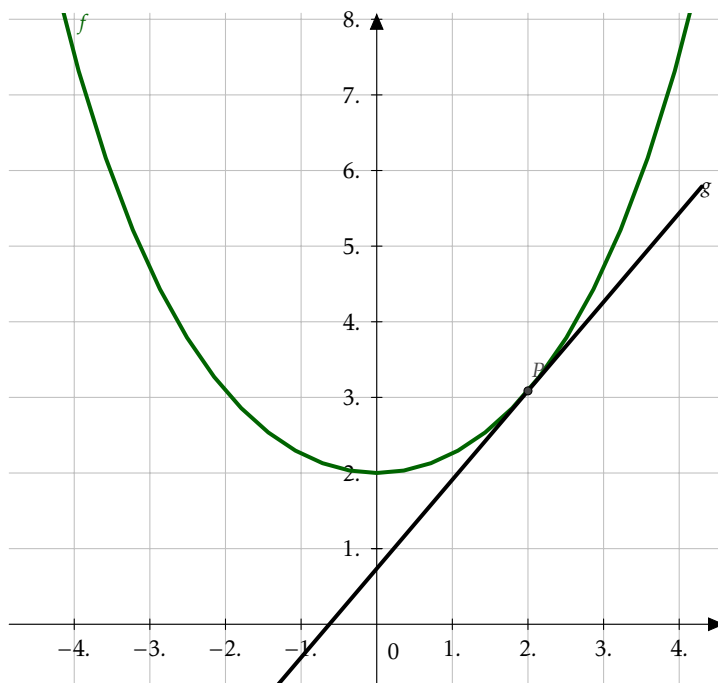
$$-\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 0$$

$$f''(0) = \frac{1}{4}f(0) = 0,5 > 0 \Rightarrow \text{linksgekrümmt, also Minimum Koordinaten: Min}(0|2)$$

e)  $f(2) = e + e^{-1} \approx 3,09$

$$f'(2) = e - e^{-1} = e + \frac{1}{3} \approx 1,2$$

$$f) f(4) = e^2 + e^{-2} = e^2 + \frac{1}{e^2} \approx 7,52$$



$$g) \frac{1}{4}[f(x)]^2 = \frac{1}{4}(e^x + 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + e^{-x})$$

$$= \frac{1}{4}(e^x + 2 + e^{-x}) = A$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{4}(e^x - 2 + e^{-x}) = B$$

$$A - B = \frac{1}{4}(e^x + 2 + e^{-x} - e^x + 2 - e^{-x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \checkmark$$

$$h) \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{\frac{1}{4}[f(x)]^2} dx =$$

$$\int_a^b \frac{1}{2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}]$$

$$L_{0;b} = \frac{1}{2} (2 \cdot e^{\frac{1}{2}b} - 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}b} - (2 - 2))$$

$$L_{0;b} = e^{\frac{1}{2}b} + e^{-\frac{1}{2}b} \checkmark$$

2 a) Die Angaben können alle der Nr. 1 entnommen werden:

$$f(4) - f(0) \approx 7,52 - 2 = 5,52$$

b)  $f'(4) \approx 3,63 = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 15,4^\circ$

$$L = 2 \cdot L_{0,4} = 2 \cdot \left( e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - e^{-\frac{1}{2} \cdot 4} \right) = 2 \cdot \left( e^2 - e^{-2} \right) \approx 14,51$$

Das Seil ist etwa 14,51m lang.

- c)  $q(x)$  ist achsensymmetrisch und um 2 nach oben verschoben, also ist nur  $a$  unbekannt:

$$q(x) = ax^2 + 2$$

$$q(4) = a \cdot 16 + 2 = e^2 + e^{-2} \Rightarrow a = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{16} \approx 0,35$$

$$\Rightarrow q(x) = \left( \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{16} \right) x^2 - 2$$

- d) Bilde die Differenzfunktion  $d(x)$ , leite sie ab ( $d'(x)$ ) und bestimme den  $x$ -Wert, bei dem  $d'(x) = 0$  gilt.

Vergleiche alle  $d(x)$  für die Nullstellen und nimm den größten.