Abi 15 Lsg Ana II

A 1. a) Definitionsbereich

$2x+3>0$
$2x>-3$
$x>-1,5 \Rightarrow D=]-1,5;+\infty[$
Wertebereich $W=\mathbb{R}$

b) $g(x)=0 \Rightarrow 2x+3=1 \Rightarrow x=-1$

$g'(x)=\frac{2}{2x+3} \Rightarrow g'(-1)=2$

$0=2\cdot(-1)+t \Rightarrow t=2$

Geradengleichung: $y=2x+2$

2. a) $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

$f'(x)=3x^2-12x+1$

$f''(x)=6x-12=0 \Rightarrow x=2$

$f(x)=8-24+22-6=0$

$x=2$ in die Gerade einsetzen: $y=2-2=0$

Der Punkt liegt also auf der Geraden✓.

b) Dies erreicht man z.B. durch eine Verschiebung um 1 in positiver x-Richtung und um 2 in positiver y-Richtung:

$h(x)=(x-1)^3-6(x-1)^2+11(x-1)-6+2$

3. a) $\sqrt{5-x}$
b) $\frac{x-2}{(x+3)^2}+1$

4. $f_a : x \mapsto x \cdot e^{ax} \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_a'(x) = e^{ax} + x \cdot a \cdot e^{ax} = e^{ax} \cdot (1 + ax)$

$f_a'(2) = e^{2a} \cdot (1 + 2a) \Rightarrow 1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

B 1. $f : x \mapsto ax^4 + bx^3 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

a) Bei Wendepunkten ist die zweite Ableitung Null:

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx = 6x \cdot (2ax + b)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \checkmark \qquad x_2 = -\frac{b}{2a}$

Zweiter WEP liegt bei x = 1:$-\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$

$f(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 = a - 2a = -a = -1 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow b = -2 \cdot (1) = -2 \checkmark$

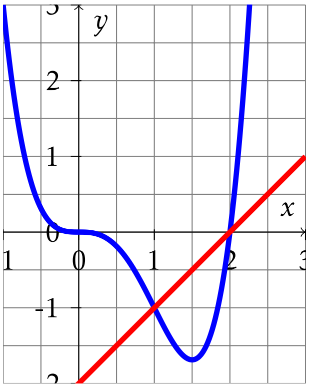
b) $f'(x) = 0 \Rightarrow 4ax^3 + 3bx^2 = x^2 \cdot (4ax + 3b) = 0$

$x_3 = 0$ (Terrassenpunkt, weil Wendepunkt) $\qquad 4ax + 3b = 0 \Rightarrow x = -\frac{3b}{4a}$

c) Die Gerade geht durch $(1|-1)$ und durch $(2|0)$. Also ist $m = \frac{2-1}{0-(-1)} = \frac{1}{1} = 1$

Die Gerade geht durch $(2|0)$, also gilt:

$0 = 1 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -2$



d) Der "linke obere" Flächeninhalt ist:

$$A_1 = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| + 0,5 = \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1\right| + 0,5$$
$$= \left|\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - 0\right| + 0,5 = 0,3 + 0,5 = 0,8$$

Der "rechte untere" Flächeninhalt kann mit der Differenzfunktion berechnet:

$$d(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 2x^3 - (x - 2)$$

$$A_2 = \int_1^2 x^4 - 2x^3 - x + 2dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2$$
$$= \frac{16}{5} - \frac{8}{2} - \frac{4}{2} + 4 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\right)$$

$$= 0,8$$

Die Flächeninhalte sind gleichgroß, verhalten sich also wie 1:1.

2. Funktion mit Parameter:

a)
- f_0 entspricht Abbildung 4, da es sich um eine verschoben Normalpotenzfunktion Grad 4 handelt (Symmetrie zur y-Achse, zwei Nullstellen ungleich Null).
- f_1 entspricht Abbildung 3, da der Graph keine Symmetrie aufweisen kann (das Polynom enthält gerade und ungerade Potenzen),
- f_2 entspricht Abbildung 1, da die Funktion achsensymmetrisch ist und drei Nullstellen hat. $x^2(x^2 - 2) = 0$
- $f_4 = x^4 - 2x^4 = -x^4$ ist also eine an der x-Achse gespiegelte Normalpotenzfunktion vom Grad 4.

b) Laut Angabe hat der Summand $-2x^n$ die höhere Potenz. Ist diese Potenz gerade so erhält man für beide Ränder $-\infty$ als Grenzwert. Sonst ergibt sich für den linken Rand $+\infty$, für den rechten $-\infty$ als Grenze.

3. a) $g(1,5) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{16} \approx -0,278$

   Ein negatives Vorzeichen bedeutet laut Modell ”ausatmen”.

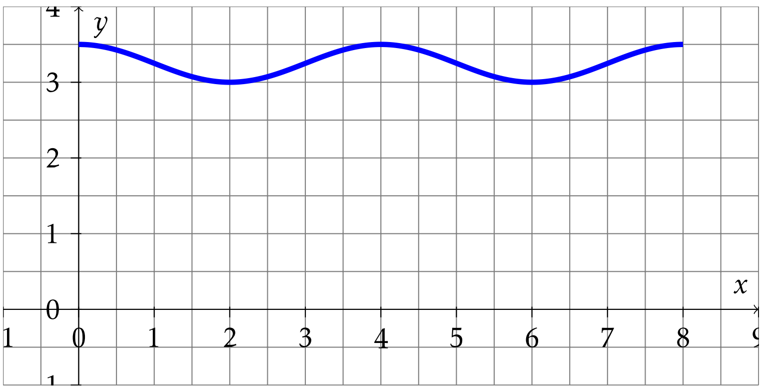
   b) Das Lungenvolumen ist im Modell nach 2s minimal, da der zum Zeitpunkt t=0 beginnende Vorgang des Ausatmens dort beendet ist.

   c)

$$\begin{aligned}\int_2^4 g(t)dt &= \left[\frac{\pi}{8} \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right) \cdot \frac{2}{\pi}\right]_2^4 \\ &= \left[\frac{1}{4} \cdot cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)\right]_2^4 \\ &= \frac{1}{4}cos(2\pi) - \frac{1}{4}cos(\pi) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (1-(-1)) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Zwischen t = 2s und t = 4s wurde ein halber Liter Luft eingeatmet.

   d) Skizze:



   e) $f = \frac{60}{4} min^{-1} = 15 min^{-1}$

   $f_{neu} = 1,2 \cdot f \Rightarrow b_{neu} = 1,2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0,6 \cdot \pi$