Abi 84 Lsg Ana II

1. a) Definitionsbereich:

   - Der Nenner des Bruches darf nicht Null werden: $x \neq 0$
   - Das Argument der ln-Funktion darf weder Null noch negativ werden:

     $\frac{x-1}{2x} > 0$

     $\frac{x}{2x} - \frac{1}{2x} > 0$

     $\frac{1}{2} > \frac{1}{2x} \qquad | \cdot 2x$

     1. Fall: $x > 0$

     $x > 1 \Rightarrow x \in]1;\infty[$

     2. Fall: $x < 0$

     $x < 1 \Rightarrow x \in]-\infty;0[$

     $D_f =]-\infty;0[\cup]1;\infty[$

   Asymptote bei x=0:

   $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{x-1}{2x} \to \infty.$

   Da der natürliche Logarithmus mit wachsendem x über jede Grenze hinaus wächst, gilt auch:

   $\lim\limits_{x \to 0-0} ln\left(\frac{x-1}{2x}\right) \to \infty$ (senkrechte Asymptote bei x=0).

   Asymptote bei x=1:

   $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{x-1}{2x} \to 0$

   Das führt als Argument der Logarithmusfunktion dazu, dass der Logarithmus kleiner als jeder negativer Wert wird:

   $\lim\limits_{x \to 1+0} ln\left(\frac{x-1}{2x}\right) \to -\infty$ (senkrechte Asymptote bei x=1).

   Asymptote bei y=-ln 2:

$$\lim_{x\to\pm\infty} ln\left(\frac{x-1}{2x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} ln(\tfrac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0}) = ln(\tfrac{1}{2}) = ln(2^{-1}) = -ln2$$

b) $f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{2x}} \cdot \frac{2x-2(x-1)}{4x^2} = \frac{2x}{x-1} \cdot \frac{2}{4x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{(x-1)\cdot x}$

Monotonieverhalten:

$f'(x)$ besitzt keine Nullstellen, da der Zähler nicht den Wert 0 annehmen kann.

1.Fall: $x \in]-\infty;0[$, dann ist der Nenner positiv (als Produkt zweier negativer Zahlen)

2.Fall: $x \in]1;\infty[$, dann ist der Nenner positiv (als Produkt zweier positiver Zahlen)

$\Rightarrow f'(x) > 0$, der Graph ist also streng monoton steigend.

c) Wertemenge:

Für $x \in]-\infty;0[$ gilt $W_f =]-ln2;\infty[$

Für $x \in]1;\infty[$ gilt $W_f =]-\infty;-ln2[$

$\Rightarrow W_f = \mathbb{R} \setminus \{-ln2\}$

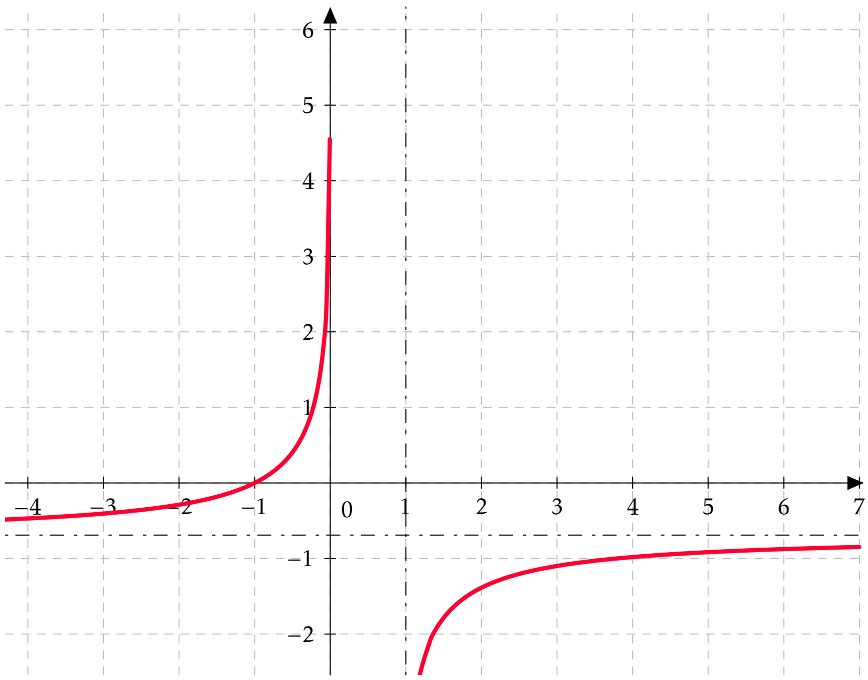
Nullstellen:

Die ln-Funktion wird nur dann Null, wenn das Argument 1 ist:

$\frac{x-1}{2x} = 1 \Rightarrow x-1 = 2x \Rightarrow -1 = x$

$\Rightarrow$ Einzige Nullstelle $N(-1|0)$.

d) Graph:



2. a) $F(x) = x \cdot f(x) - ln|x-1|$ ist Stammfunktion.

   $F'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) - \frac{1}{x-1} = f(x) + \frac{x}{(x-1)\cdot x} - \frac{1}{x-1} = f(x)\checkmark$

   b) $\int_2^u f(x)dx = [F(x)]_2^u = F(u) - F(2) = u \cdot f(u) - ln(u-1) - 2 \cdot f(2) + ln(2-1)$

   $= u \cdot ln(\frac{u-1}{u}) + 2 \cdot ln4 + 0$

3. $x = ln(\frac{y-1}{2y}) \qquad |e^{()}$

   $e^x = \frac{y-1}{2y} \qquad | \cdot 2y$

   $2y \cdot e^x = y - 1 \qquad | - y$

   $y(2e^x - 1) = -1 \qquad | : (2e^x - 1)$

   $y = \frac{1}{1-2e^x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{1-2e^x}$

   $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{-ln2\}$

   $W_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus [0;1]$