Abi 14 Lsg Geo I

A 1 a) Der Punkt F muss (weil das Prisma gerade ist), die gleiche Höhe wie D besitzen und in den anderen Komponenten mit C übereinstimmen:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{BF} = \left|\vec{F} - \vec{B}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+64+16} = 12$$

b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\quad \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es muss gelten: $\vec{PM} \circ \vec{KM} = 0$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -y_k \\ -2 \end{pmatrix} = -4 \cdot 0 + 4y_k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow y_k = 1$$

2 a) Die Ebene liegt parallel zur x_1-Achse.

b) Bestimme die Entfernung des Mittelpunktes Z der Kugel von der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = 5$$

Hesse-Normalform der Ebene:

$$HNF(E) : \tfrac{3}{5}x_2 + \tfrac{4}{5}x_3 - 1$$

Z einsetzen:

$$\tfrac{3}{5} \cdot 6 + \tfrac{4}{5} \cdot 3 - 1 = \tfrac{18}{5} + \tfrac{12}{5} - \tfrac{5}{5} = \tfrac{25}{5} = 5$$

Der Abstand der Kugel von der Ebene ist kleiner als ihre Radius. Also schneidet sie die Ebene.

B a) $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right|$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 16^2 + 16^2} = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

b) Geradengleichung: $g : \vec{X} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 2-\lambda \\ 3-4\lambda \end{pmatrix}$

Setze g in E:

$2 - \lambda + 2 - \lambda + 3 - 4\lambda - 4 = 0$

$3 - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$

Schreibe die Parameterform der Ebene auf, die den Spiegel enthält:

$E : \vec{A} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}$

Setze dies mit dem Punkt R gleich. Wenn $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ und $0 \leq \lambda + \mu \leq 1$ dann liegt R im Dreieck:

$\begin{pmatrix} 4-4\lambda-4\mu \\ 4\mu \\ 4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 0,25 \qquad \mu = 0,375\checkmark$

c) Bilde den Verbindungsvektor und zeige, dass
- der Mittelpunkt zwischen P und Q in E liegt.
- dieser Vektor linear abhängig von $\vec{n}$ ist (dann ist die Verbindungsstrecke senkrecht zu E).

$\vec{w} = \vec{P} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{n}\checkmark$

$\vec{M} = \vec{Q} + \frac{1}{2} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

M in Ebene einsetzen:

$1 + 1 + 2 - 4 = 0\checkmark$

Der Verbindungsvektor ist linear abhängig von n und der Mittelpunkt von P und Q liegt in der Ebene.

d) $\vec{RP} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegt in F, also $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist RV von F

$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt in F, also $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist RV von F

Normalenvektor: $\vec{n}'_F = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_F = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-x_1 + x_2 + c = 0$

R einsetzen: $-1,5 + 1,5 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$F: -x_1 + x_2 = 0$ oder $x_1 - x_2 = 0$✓

Das Einfallslot ist der Normalenvektor auf E: $\vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dieses liegt in F, wenn der Normalenvektor von F darauf senkrecht steht:

$\vec{l} \circ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 + 0 = 0$✓

e) $cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} = cos\beta$