

Abi 14 Lsg Geo II

- A 1 a) Ein Quader besteht aus paarweise rechtwinkligen Kanten. Zeige also, dass alle Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Beispielsweise mit Hilfe des Skalarproduktes:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0 \checkmark$$

Da die Multiplikation mit t nur die Länge, nicht aber die Richtung des Vektors c verändert, kann man für die Untersuchung der Orthogonalität z.B mit $t = 1$ rechnen:

$$\vec{a} \circ \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 8 + 2 - 10 = 0 \checkmark$$

$$\vec{b} \circ \vec{c}_1 = -4 + 4 + 0 = 0 \checkmark$$

- b) Das Volumen berechnet sich zu $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}_t|$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{c}_t| = |t| \cdot \sqrt{45} = |t| \cdot 3\sqrt{5}$$

$$V = 3 \cdot \sqrt{5} \cdot |t| \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = |t| \cdot 45$$

$$V = 15 = 45 \cdot |t| \Rightarrow |t| = \frac{1}{3} \Rightarrow t_{1/2} = \pm \frac{1}{3}$$

$$2 \text{ a) } \vec{Q} = \vec{M} + P\vec{M} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- b) Der Abstand des Mittelpunktes zur $x_1 x_2$ -Ebene ergibt sich aus der x_3 -Komponente. $x_3 = 7$. Der Mittelpunkt befindet sich also sieben Einheiten oberhalb der $x_1 x_2$ -Ebene. Wenn der Radius ebenfalls sieben beträgt, dann berührt die Kugel die $x_1 x_2$ -Ebene.

$$|P\vec{M}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7 \checkmark$$

B a) Das Dach hat eine Länge von 10m (siehe Angabe). Die Breite berechnet sich aus

$$\vec{CH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \vec{CH} \right| = 5$$

Als Gesamtfläche ergibt sich $10m \cdot 5m = 50m^2$

b) Gesucht ist der Winkel zwischen \vec{CH} und \vec{CD} .

$$\cos \psi = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{5 \cdot 8} = \frac{32}{40} = 0,8$$

$$\Rightarrow \psi = 36,87$$

Der Winkel liegt über 35° , die Gaube ist also zulässig.

c) Einfachste Möglichkeit: Setze t in KoFo von E.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 4 + 4\lambda \\ 8 \\ 8 - 3\lambda \end{pmatrix} \text{ eingesetzt:}$$

$$3 \cdot (4 + 4\lambda) + 4 \cdot (8 - 3\lambda) - 44 = 0$$

$$12 + 12\lambda + 32 - 12\lambda - 44 = 0$$

$$44 - 44 = 0 \checkmark$$

Diese Aussage ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt, deshalb liegt g in E.

Um zu zeigen, dass die Geraden parallel sind, zeigt man z.B., dass die Richtungsvektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -1 \checkmark$$

Weiterhin steht der Vektor \vec{TH} senkrecht auf dem Richtungsvektor:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Da die Gerade TH senkrecht auf beiden Geraden steht, ist der Abstand von T nach H gleich dem Abstand der Geraden:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 2\checkmark$$

- d) Der Richtungsvektor hat die Länge 5. Um also nur eine Längeneinheit von T aus zu gehen muss $\lambda = \frac{1}{5}$ gelten:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} \checkmark$$

- e) Beide Ebenen haben den gleichen Normalenvektor. Also:

$$F: 3x_1 + 4x_3 + c = 0$$

Einsetzen des versetzten Ebenenpunktes M ergibt:

$$3 \cdot 4,8 + 4 \cdot (7,4 + 1,4) + c = 0$$

$$14,4 + 35,2 + c = 0 \Rightarrow c = -49,6 \checkmark$$

- f) Schneide $m: \begin{pmatrix} X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 + 6\mu \\ 8 \\ 7,4 - \mu \end{pmatrix}$ mit F:

$$3 \cdot (4,8 + 6\mu) + 4 \cdot (7,4 - \mu) - 49,6 = 0$$

$$14,4 + 18\mu + 29,6 - 4\mu - 49,6 = 0$$

$$-5,6 + 14\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0,4 \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \checkmark$$

- g) L liegt 1,4m tiefer als N: $\vec{L} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 8 \\ 5,6 \end{pmatrix}$

Zur Abstandsbestimmung verschiebt man L an die Dachkante und bestimmt den Abstand $C\vec{L}'$:

$$\vec{L}' = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 10 \\ 5,6 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \sqrt{(8-7,2)^2 + 0^2 + (5-5,6)^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$