Abi 14 Lsg Geo II

A 1 a) Ein Quader besteht aus paarweise rechtwinkligen Kanten. Zeige also, dass alle Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Beispielsweise mit Hilfe des Skalarproduktes:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0 \checkmark$$

Da die Multiplikation mit t nur die Länge, nicht aber die Richtung des Vektors c verändert, kann man für die Untersuchung der Orthogonalität z.B mit $t = 1$ rechnen:

$$\vec{a} \circ \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 8 + 2 - 10 = 0 \checkmark$$

$$\vec{b} \circ \vec{c}_1 = -4 + 4 + 0 = 0 \checkmark$$

b) Das Volumen berechnet sich zu $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}_t|$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{c}_t| = |t| \cdot \sqrt{45} = |t| \cdot 3\sqrt{5}$$

$$V = 3 \cdot \sqrt{5} \cdot |t| \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = |t| \cdot 45$$

$$V = 15 = 45 \cdot |t| \Rightarrow |t| = \frac{1}{3} \Rightarrow t_{1/2} = \pm\frac{1}{3}$$

2 a) $\vec{Q} = \vec{M} + \vec{PM} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

b) Der Abstand des Mittelpunktes zur x_1x_2-Ebene ergibt sich aus der x_3-Komponente. $x_3 = 7$. Der Mittelpunkt befindet sich also sieben Einheiten oberhalb der x_1x_2-Ebene. Wenn der Radius ebenfalls sieben beträgt, dann berührt die Kugel die x_1x_2-Ebene.

$$|\vec{PM}| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7 \checkmark$$

B a) Das Dach hat eine Länge von 10m (siehe Angabe). Die Breite berechnet sich aus

$\bar{CH} = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 5$

Als Gesamtfläche ergibt sich $10m \cdot 5m = 50m^2$

b) Gesucht ist der Winkel zwischen $\vec{CH}$ und $\vec{CD}$.

$cos\psi = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{5 \cdot 8} = \frac{32}{40} = 0,8$

$\Rightarrow \psi = 36,87$

Der Winkel liegt über 35°, die Gaube ist also zulässig.

c) Einfachste Möglichkeit: Setze t in KoFo von E.

$\vec{X} = \begin{pmatrix} 4+4\lambda \\ 8 \\ 8-3\lambda \end{pmatrix}$ eingesetzt:

$3 \cdot (4+4\lambda) + 4 \cdot (8-3\lambda) - 44 = 0$

$12 + 12\lambda + 32 - 12\lambda - 44 = 0$

$44 - 44 = 0$✓

Diese Aussage ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt, deshalb liegt g in E.

Um zu zeigen, dass die Geraden parallel sind, zeigt man z.B., dass die Richtungsvektoren linear abhängig sind: $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -1$✓

Weiterhin steht der Vektor $\vec{TH}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

Da die Gerade TH senkrecht auf beiden Geraden steht, ist der Abstand von T nach H gleich dem Abstand der Geraden:

$$\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 2\checkmark$$

d) Der Richtungsvektor hat die Länge 5. Um also nur eine Längeneinheit von T aus zu gehen muss $\lambda = \frac{1}{5}$ gelten:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix}\checkmark$$

e) Beide Ebenen haben den gleichen Normalenvektor. Also:

$F : 3x_1 + 4x_3 + c = 0$

Einsetzen des versetzten Ebenenpunktes M ergibt:

$3 \cdot 4,8 + 4 \cdot (7,4 + 1,4) + c = 0$

$14,4 + 35,2 + c = 0 \Rightarrow c = -49,6\checkmark$

f) Schneide $m : \left(X \right) = \begin{pmatrix} 4,8 + 6\mu \\ 8 \\ 7,4 - \mu \end{pmatrix}$ mit F:

$3 \cdot (4,8 + 6\mu) + 4 \cdot (7,4 - \mu) - 49,6 = 0$

$14,4 + 18\mu + 29,6 - 4\mu - 49,6 = 0$

$-5,6 + 14\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0,4 \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}\checkmark$

g) L liegt 1,4m tiefer als N:$\vec{L} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 8 \\ 5,6 \end{pmatrix}$

Zur Abstandsbestimmung verschiebt man L an die Dachkante und bestimmt den Abstand $\bar{CL'}$:

$$\vec{L}' = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 10 \\ 5,6 \end{pmatrix} \Rightarrow d = \sqrt{(8-7,2)^2 + 0^2 + (5-5,6)^2} = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$