Abi 08 Lsg Ana I

1. $f : x \mapsto \frac{8x}{x^2+4}$

   a) <u>Symmetrie</u>

   $f(-x) = \frac{-8x}{(-x)^2+4} = -\frac{8x}{x^2+4}$

   $f(-x) = -f(x)$

   Der Graph ist punktsymmetrisch.

   <u>Definitionsbereich</u> Der Nenner ist immer positiv, da $x^2 ge 0 \Rightarrow x^2 + 4 ge 4$

   Es gibt also keine Pole oder senkrechten Asymptoten.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, da der Nenner stärker wächst als der Zähler.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, da – " – .

   $f(0) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

   b) $f'(x) = \frac{8\cdot(x^2+4)-8x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{8x^2+32-16x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{32-8x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-8\cdot(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$

   $f'(x) = \frac{-8\cdot(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$

   $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2; \qquad x_1 = -2; x_2 = +2$

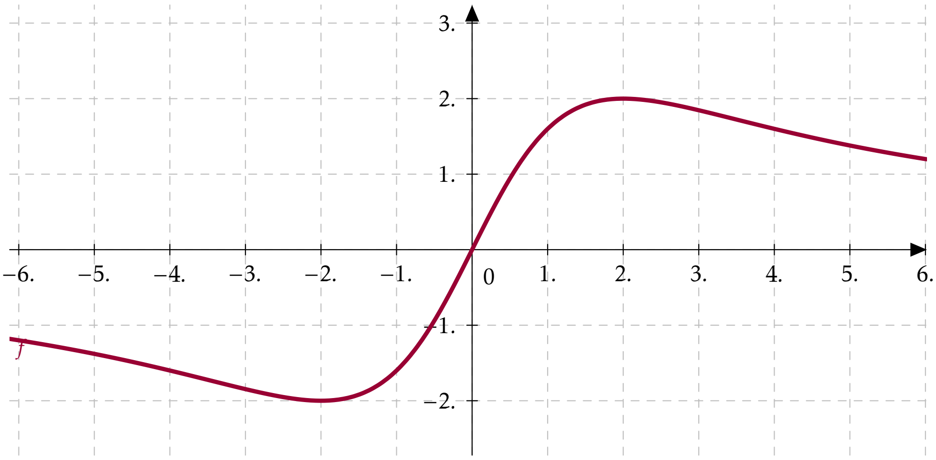
   $f(2) = 2; \qquad f(-2) = -2$

VZT	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < +2$	$x = +2$	$2 < x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
G_f	$\nearrow$	TIP	$\searrow$	HOP	$\nearrow$

   c) Tangente an 0 im Ursprung hat den y-Achsenabschnitt t = 0. Die Steigung beträgt im Ursprung:

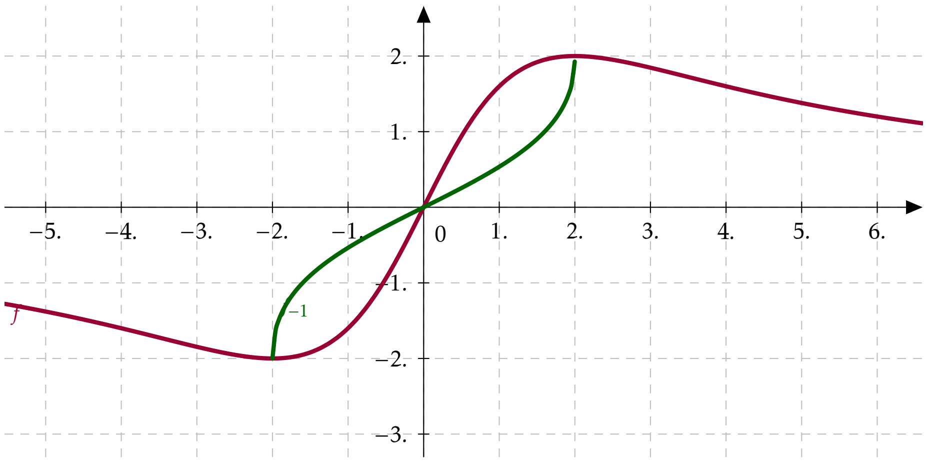
   $f'(0) = \frac{32}{16} = 2$

   $f(1) = 1,6; \qquad f(6) = 1,2$

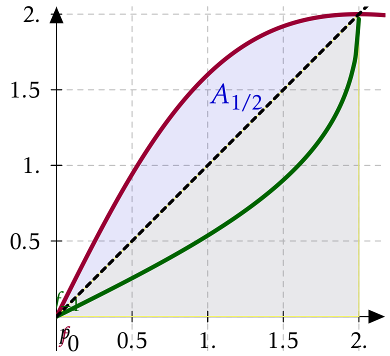


d) Wie aus der Vorzeichentabelle hervorgeht, ist f(x) im Interval $]-2;+2[$ streng monoton steigend und somit umkehrbar.

Der Graph ergibt sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden:



e) Die beiden Graphen sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Daher lässt sich der halbe Flächeninhalt durch den Flächeninhalt zwischen der Winkelhalbierenden und dem Graphen von f berechnen:



Der halbe Flächeninhalt berechnet sich also zu:

$A_{1/2} = \int_0^2 f(x)dx - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \left[4ln(x^2+4)\right]_0^2 - 2$

$= 12 \cdot ln(2) - 8 \cdot ln(2) - 2 = 4ln(2) - 2 \approx 0,773$

$\Rightarrow A \approx 2 \cdot 0,773 = 1,55$

2. $h : x \mapsto 8 - \frac{8x}{x^2+4}$

a) Der Graph ist an der x-Achse gespiegelt $(-f(x))$ und um 8 in positiver y-Richtung verschoben. Der Extremwert ist also nach wie vor bei 2, das bedeutet dass er nach 2 Tagen erreicht wird. Wegen der Spiegelung an der x-Achse handelt es sich jetzt um das Minimum. Der Wert beträgt:

$h(2) = 8 - 2 = 6$ Der Sauerstoffgehalt ist dann 6 mg pro Liter.

b) Ursprünglicher Wert: $h(0) = 8$

Grenzwert: $g = 0,95 \cdot 8 = 7,6$

Zeitpunkt: $h(x) = 7,6 = 8 - \frac{8x}{x^2+4}$

$\frac{8x}{x^2+4} = 0,4$

$8x = 0,4x^2 + 1,6$

$0,4x^2 - 8x + 1,6 = 0$

$x^2 - 20x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-4 \cdot 1 \cdot 4}}{2}$

$x_1 \approx 0,2 \qquad x_2 \approx 19,6$

Nach etwa 19,6 Tagen hat der Sauerstoffgehalt wieder 95 % seines ursprünglichen Wertes erreicht.

c) $\frac{1}{20} \int\limits_0^{20} h(x)dx = \frac{1}{20} \cdot \left[8x - 4ln(x^2+4)\right]_0^{20}$

$= \frac{1}{20}(160 - 4ln(404) - 0 + 8ln(2)) \approx \frac{1}{2}0 \cdot 141,5 \approx 7,1$

Der mittlere Sauerstoffgehalt beträgt also etwa 7,1 mg pro Liter.