Abi 07 Lsg Geo I

$A(8|2|0), B(8|3|2), C(8|-3|2), D(8|-2|0), B'(0|3|2)$

1. a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \vec{v} = \overrightarrow{AB'} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   KoFo von E: $-2x_2 + x_3 + c = 0$

   A einsetzen:

   $-2 \cdot 2 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 4$

   KoFo von E:

   $-2x_2 + x_3 + 4 = 0$ oder: $2x_2 - x_3 - 4 = 0$

   b) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \overrightarrow{AD}$

   Die Vektoren sind linear abhängig, also ist die Seite [AD] parallel zur Seite [BC].
   Nachdem alle x_1-Koordinaten identisch sind, steht das Trapez parallel zur x_2x_3-Ebene im Raum.
   Die einzig mögliche Symmetrie eines Trapezes ist Achsensymmetrie. Dazu müsste die Verbindunslinie der Mittelpunkte der parallelen Seiten senkrecht auf den Seiten stehen:

   $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{A} + \vec{D}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\vec{N} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{z} = \vec{MN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{z} \circ \vec{AD} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 0 = 0 \checkmark$

$\vec{z} \circ \vec{BC} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-6) + 2 \cdot 0 = 0 \checkmark$

Das Trapez ist also achsensymmetrisch.

c) Die x_2-Achse lässt sich durch $(0|y|0)$ darstellen. In KoFo von E:

$2y - 0 - 4 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \vec{A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rechtwinkligkeit:

$\vec{A'A} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \cdot 0 + 0 \cdot -4 + 0 \cdot 0 = 0 \checkmark$

$D' = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Spiegelung an x_1x_3-Ebene: x_2-Koordinate ändert ihr Vorzeichen:

$C' = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. a) Berechne den Winkel zwischen beiden Normalenvektoren.

x_1x_2-Ebene hat den Normalenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$cos(\alpha) = \frac{\vec{n} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{|\vec{n}| \cdot 1} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \approx -0,45$

$\Rightarrow \alpha \approx 63,43$

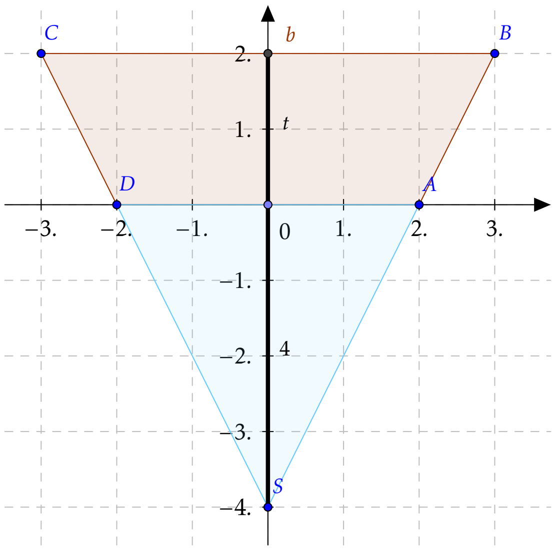
b) Berechnung der Trapezfläche: $h = 4m; a = 12m; c = 8m;$

$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (a + c) = 40m^2$

Länge des Kanalstücks (Angabe): $16m$

$V = 16m \cdot 40m^2 = 640m^3$ ✓

c) 2D-Grafik:



Nach dem Strahlensatz gilt: $\frac{b}{t+8m} = \frac{8m}{8m}$

$\Rightarrow b = 1 \cdot (t + 8m) = t + 8m$

Querschnittsfläche:

$A_T = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (8m + b) = 0,45A_0 = 0,45 \cdot 40m^2 = 18m^2$

$\frac{1}{2} \cdot t \cdot (8m + t + 8m) = 18m^2$

$t \cdot (t + 16m) = 36m^2; t > 0$

$t^2 + 16m \cdot t - 36m^2 = 0$

$(t - 2m)(t + 18m) = 0$

$t = 2m$