Grundlegende Aufgaben zu Punkte, Gerade, Ebene

Gegeben sind folgende Objekte des Raumes: $P(0|-0,5|-2,5)$, $Q(0|0|3)$,

$E : x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 0$, $F : x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0$,

$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Bestimme den Abstand von P und Q.
2. Liegt P auf h?
3. Liegt Q auf F?
4. Welchen Abstand hat Q von der Geraden g?
5. Welchen Abstand hat Q von der Ebene E?
6. Bestimme die Lage von P bezüglich E und F.
7. Wie liegt g zu E und wie liegt h zu F? Wenn Parallelität vorliegt, dann ist der Abstand der Geraden zur Ebene zu bestimmen.
8. Welche Lage haben g und h zueinander?
9. Bestimme die Schnittgerade s zu E und F.
10. In welchem Winkel treffen sich die beiden Ebenen?
11. In welchem Winkel trifft g auf E?
12. Bestimme den Abstand von g und h.

0.1 Lösungen

Gegeben sind folgende Objekte des Raumes: $P(0|-0,5|-2,5)$, $Q(0|0|3)$,

$E: x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 0$, $F: x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0$,

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Abstand PQ: $d(P,Q) = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + 5,5^2} \approx 5,52$

2. Lage von P und h: $\begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Für x_1 ergibt sich $\mu = 0$. Für x_2 gibt es kein μ das die Gleichung erfüllen kann. Also liegt P nicht auf der Geraden.

3. Setze Q in die Kofo von F ein:

   $0 - 0 + 3 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow$ Q liegt nicht in F.

4. $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$

   $\left(\vec{X} - \vec{P}\right) \circ \vec{u} = 0$

   $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

   $\Rightarrow$ Fußpunkt $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow d(Q,g) = |\vec{FQ}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

5. Welchen Abstand hat Q von der Ebene E? HNF von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{3}$

   HNF(E): $\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 + \frac{3}{\sqrt{3}}$

   einsetzen: $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 + \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$

6. Setze P in KoFo von E: $0 - 0,5 - 2,5 + 3 = 0\checkmark$ P liegt in E.

   Setze P in KoFo von F: $0 + 0,5 - 2,5 + 2 = 0\checkmark$ P liegt auch in F.

7. Untersuchung von g und E. Benutze dazu die Darstellung aus Nr. 2 und setze sie in KoFo von E

   $1 + 1 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -5 \Rightarrow$Schnittpunkt$\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

   Untersuchung von h und F.

   $h : \vec{X} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 1 - mu \end{pmatrix}$ in KoFo von F:

   $\mu - 0 + (1 - \mu) + 2 = 0 \Rightarrow 3 = 0 \Rightarrow$ h liegt parallel zu F.

   Abstand: untersuche den Abstand des Aufpunktes $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu F:

   HNF von F: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{3}$

   HNF(F): $\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 + \frac{2}{\sqrt{3}}$

   einsetzen: $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \approx 1,73$

8. Die Richtungsvektoren sind nicht linear abhängig, die Geraden haben keinen Schnittpunkt, also sind sie windschief.

9. Bestimme die PaFo von F, suche dazu drei Punkte auf F:

   A(0|0|-2); B(0|2|0); C(-2|0|0);

   PaFo: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ 2\lambda \\ -2 + 2\lambda + 2\mu \end{pmatrix}$ in Kofo von F: $-2\mu + 2\lambda + (-2 + 2\lambda + 2\mu) + 3 = 0$

   $4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$

in PaFo von F: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -2\mu \\ -0,5 \\ -2-0,5+2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$s : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ -2,5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

10. $\psi \approx 70,53$

11. $\psi \approx 35,26$

12. Finde die KoFo einer Ebene G die g enthält und senkrecht auf den Richtungsvektoren von g und h steht:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$G : x_2 + c = 0$

Außerdem muss der Aufpunkt von g in der Ebene G enthalten sein:

$1 + c = 0 \Rightarrow c = -1; G : x_2 - 1 = 0$

Da der Normalenvektor $\vec{n}$ schon die Länge 1 hat, ergibt sich als Hesse-Normalform:

$HNF(G) : x_2 - 1$ da setzt man nun den Aufpunkt von h ein:

$d(h, G) = |0 - 1| = 1$

Die windschiefen Geraden haben also den Abstand 1.