Einführung des Skalarproduktes

0.1 Voraussetung

Satz des Pythagoras

0.2 Motivation

Wie findet man heraus, ob zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen?

0.3 Herleitung

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind, dann spannen sie ein rechtwinkliges Dreieck auf und es muss der Satz des Pythagoras gelten:

$$\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2$$

algebraische Umformungen:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}^2 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}^2 = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}^2$$

Das Quadrat der Wurzel enstpricht genau dem Argument der Wurzel, was zu folgender Vereinfachung führt:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

Anwenden der binomischen Formel auf der rechten Seite:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2b_3a_3 + b_3^2$$

Subtraktion aller Quadrate auf beiden Seiten ergibt:

$$0 = -2a_1b_1 - 2a_2b_2 - 2a_3b_3$$

Division durch (-2):

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

Diese Bedingung wird also von zwei orthogonalen Vektoren erfüllt.

0.4 Beispiel

Untersuche die Basisvektoren des Raumes:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \checkmark$

Die Bedingung scheint zu funktionieren.

0.5 Definition Skalarprodukt

Untersuchung der Struktur des Terms $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

- ist ein <u>Produkt</u> der einzelnen Komponenten
- es ergibt sich eine Zahl (<u>Skalar</u>)

Deshalb wird dieser Term als das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

0.6 Zusammenfassung

- Der aufwendige algebraische Teil will gut vorbereitet sein.
- Die Überprüfung der Orthogonalität sollte von der Definition des Skalarprodukts getrennt sein.