

Abi 86 Lsg Ana I

1. (a) $D_f = \mathbb{R}^+$

Nullstelle:

$$f(x) = 0 = \frac{4}{x^2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow \infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 4 \cdot (-1) \frac{\ln(x)}{x^2} = -4 \cdot 0 = 0 \text{ (siehe Hinweis auf der Angabe)}$$

(c) $f(x) = -4x^{-2} \ln(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = 8 \cdot x^{-3} \cdot \ln(x) - 4 \cdot x^{-2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{8 \ln(x) - 4}{x^3} = 4 \cdot \frac{2 \ln(x) - 1}{x^3}$$

Extrempunkt:

$$f'(x) = 0 = 2 \ln(x) - 1 \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Lage:

$$f(\sqrt{e}) = \frac{4}{e} \cdot \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{4}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{2}{e} \approx -0,74$$

$$W_f = \left[-\frac{2}{e}; +\infty[$$

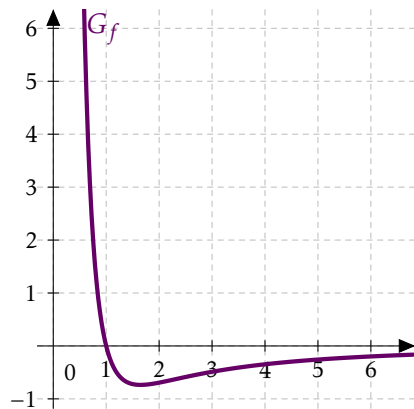
$$(d) f''(x) = 4 \cdot \frac{\frac{2}{x} \cdot x^3 - (2 \ln(x) - 1) \cdot 3x^2}{x^6} = 4 \cdot \frac{2x^2 - 6x^2 \ln(x) + 3x^2}{x^6}$$
$$= 4 \cdot \frac{5x^2 - 6x^2 \ln(x)}{x^6} = 4 \cdot \frac{5 - 6 \ln(x)}{x^4} \checkmark$$

Wendepunkt:

$$f''(x) = 0 = 5 - 6 \ln(x) \Rightarrow x = e^{\frac{5}{6}} \approx 2,3$$

$$f(e^{\frac{5}{6}}) = \frac{-4}{e^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{5}{6} \approx -0,63$$

(e) Graph:



2. (a) $F(x) = 4 \cdot \frac{1+\ln(x)}{x}$

$$F'(x) = 4 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1+\ln(x)) \cdot 1}{x^2} = 4 \cdot \frac{1-1-\ln(x)}{x^2}$$

$$F'(x) = -\frac{4}{x^2} \cdot \ln(x) = \frac{4}{x^2} \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) \checkmark$$

(b) $\left| \int_1^e f(x) dx \right| = 4 \left| \frac{1+\ln(x)}{x} \right| = 4 \cdot \left| \frac{2}{e} - 1 \right| = 4 \cdot \frac{e-2}{e} \approx 1,06$

(c) $I(x) = \int_1^x f(t) dt = 4 \cdot \frac{1+\ln(x)}{x} - 4 = 4 \cdot \left(\frac{1+\ln(x)}{x} - 1 \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I(x) = 4 \cdot (0 + 0 - 1) = -4$$

Der Betrag der Integralfunktion strebt gegen 4. Diesen endlichen Wert nimmt also der sich von $x=1$ ins Unendliche erstreckende Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse an.