

Abi 84 Lsg Ana I

1. $f : x \mapsto \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{6x-3}{x^2}$

a) Nullstelle:

$$\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Nullstelle $N(\frac{1}{2}|0)$.

Senkrechte Asymptoten:

$$\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{6x}{x^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{6x-3}{x^2}$$

Nullstelle des Nenners: $x = 0$ ist senkrechte Asymptote.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{6}{x}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\rightarrow 0} = 0$$

Waagerechte Asymptote: $y = 0$

b) Zur Bestimmung der ersten Ableitung bietet sich die Potenzschreibweise an:

$$f(x) = 6 \cdot x^{-1} - 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = -6 \cdot x^{-2} - 3 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 6x^{-3} - 6x^{-2} = \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^2} = \frac{6-6x}{x^3}$$

Suche alle Nullstellen der Ableitung:

$$\frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^3$$

$$6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1$$

VZT $x < 0$ $0 < x < 1$ $x = 1$ $1 < x$

$f'(x)$ $-$ $+$ 0 $-$

G_f \searrow \nearrow HOP \searrow

Lage des Extrempunktes: $f(1) = 3$ also HOP(1|3)

c) Zur Bestimmung der zweiten Ableitung kann man wieder mit der Potenzschreib-

weise arbeiten:

$$f'(x) = 6x^{-3} - 6x^{-2}$$

$$f''(x) = 6 \cdot (-3) \cdot x^{-4} - 6 \cdot (-2)x^{-3} = 12x^{-3} - 18x^{-4} = \frac{12}{x^3} - \frac{18}{x^4}$$

Zur Bestimmung des Wendepunktes muss $f''(x) = 0$ gesetzt werden:

$$\frac{12}{x^3} - \frac{18}{x^4} = 0 \quad | \cdot x^4$$

$$12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Da es sich um nur eine Nullstelle handelt, muss diese auch der Wendestelle entsprechen. Koordinaten des Wendepunktes:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{\frac{3}{2}} - \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

Koordinaten: WEP $\left(\frac{3}{2} \mid \frac{8}{3}\right)$.

Die Wendetangente ist eine Gerade. Geraden sind eindeutig durch Steigung und y-Achsenabschnitt festgelegt. ($w(x) = m_w x + t_w$) Da es sich um eine Tangente handelt, müssen Graph und Gerade im Berührungspunkt WEP $\left(\frac{3}{2} \mid \frac{8}{3}\right)$ die gleiche Steigung besitzen. Also gilt:

$$m_w = f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} - \frac{6}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 6 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right) = 6 \cdot \left(\frac{8}{27} - \frac{12}{27} \right) = 6 \cdot \left(-\frac{4}{27} \right) = -\frac{8}{9}$$

Die Geradengleichung schaut also jetzt so aus:

$$w(x) = -\frac{8}{9} \cdot x + t_w$$

Zur Bestimmung von t_w muss nun ein Geradenpunkt eingesetzt werden. Dazu werden die Koordinaten des Wendepunktes verwendet, in dem die Tangente den Graphen berührt:

$$w\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{3} \text{ oder}$$

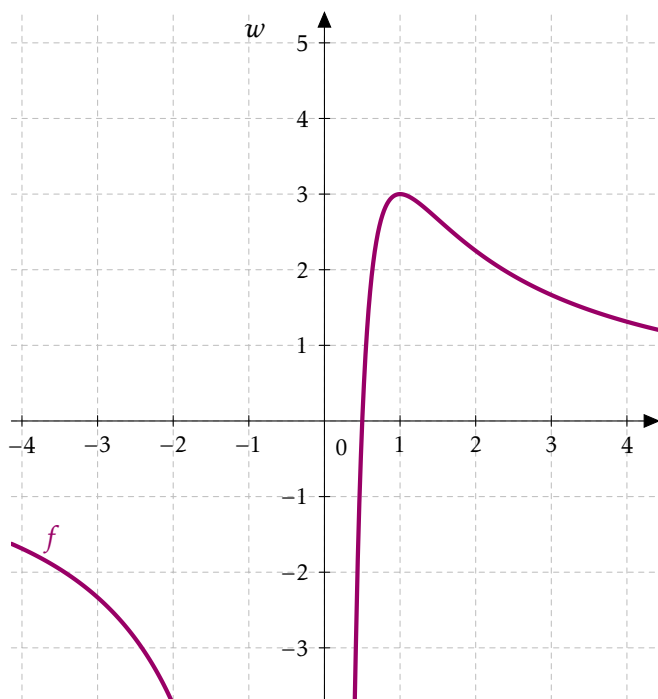
$$-\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} + t_w = \frac{8}{3}$$

$$-\frac{4}{3} + t_w = \frac{8}{3} \Rightarrow t_w = \frac{12}{3} = 4$$

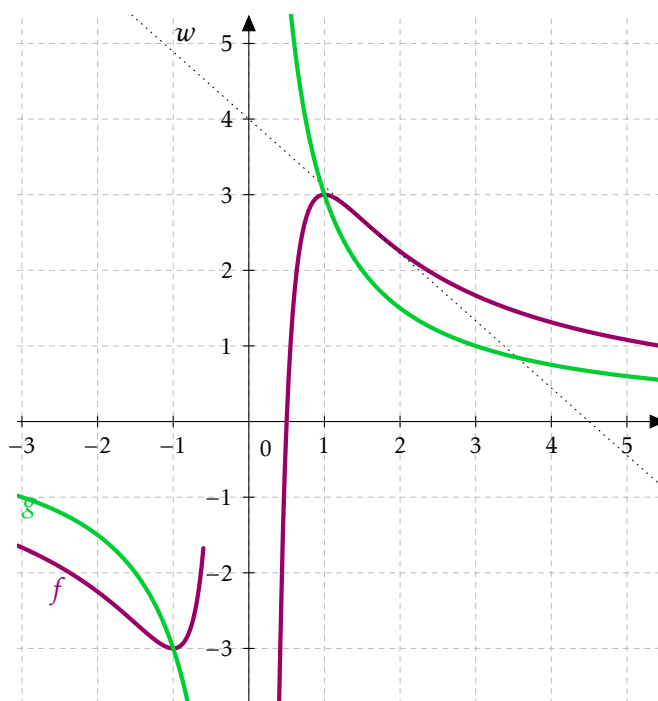
Gleichung der Wendetangente:

$$w(x) = -\frac{8}{9}x + 4$$

d) Graphen



2. a) Graphen



b) Bestimmung des Schnittpunktes beider Funktionen:

$$f(x) - g(x) = 0$$

$$\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{3(x-1)}{x^2} = 0$$

Der Schnittpunkt liegt bei $S(1|f(1))$.

Um den Flächeninhalt zwischen den Graphen zu ermitteln integriert man über die Differenzfunktion:

$$\int_1^b f(x) - g(x) dx = 3 \int_1^b \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} dx = \left[\ln(x) + \frac{1}{x} \right]_1^b = \ln(b) + \frac{1}{b} - \ln(1) - 1 = \ln(b) + \frac{1}{b} - 1$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\ln(b)}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{b}}_{\rightarrow 0} - 1 \right) \rightarrow \infty$$

3. Der gesuchte Schnittpunkt mit der y -Achse ergibt sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden und muss deshalb der Nullstelle von $f(x)$ entsprechen:

$N(\frac{1}{2}|0)$ wird zu $N'(0|\frac{1}{2})$ Da die gesuchte Tangente $z(x)$ zugleich in diesem Punkt die y -Achse schneidet ist ihr y -Achsenabschnitt $t_z = \frac{1}{2}$. Zur Bestimmung der Steigung von $z(x)$ berechnet man die Steigung der Tangente in der Nullstelle von $f(x)$ und bildet deren Kehrwert, was einer Spiegelung des Steigungsdreiecks an der Winkelhalbierenden entspricht (Vertauschung von Δx und Δy).

$$f'(\frac{1}{2}) = 8 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 4 \cdot 6 = 24$$

Daher muss die Steigung der gesuchten Tangente $m_z = \frac{1}{24}$ betragen. Die gesuchte Gleichung lautet also:

$$z(x) = \frac{1}{24}x + \frac{1}{2}$$