Abi 11 Lsg Geo II

1. a) Minimaleigenschaften für ein Rechteck:
   - 1 Paar gegenüberliegender Seiten ist gleichlang und parallel
   - es gibt einen 90°-Winkel

   Vektorvergleich:

   $$\overrightarrow{A'D'} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}; \qquad \overline{A'D'} = \sqrt{64+64+16} = 12;$$

   $$\overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{A'D'}\checkmark;$$

   Rechter Winkel:

   $$\overrightarrow{A'D'} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \overrightarrow{A'D'} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -16+32-16 = 0\checkmark$$

   Inhalt:

   $$\overline{A'B'} = \sqrt{4+16+16} = 6; \qquad A = 12 \cdot 6 = 72$$

   b) $$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

   $$\overrightarrow{BC} \circ \overrightarrow{AB} = 24 \cdot (-6) + (-24) \cdot (-12) + (-12) \cdot 12 = -144 + 288 - 144 = 0\checkmark$$

   $$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

   c) Zur Findung des Normalenvektors bildet man das Vektorprodukt aus den zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die die Ebene ABCD aufspannen. Diese lassen sich als verkürzte Version der Vektoren $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AB}$ schreiben:

   $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

   $$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ -(4-1) \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 + c = 0$

Für c Aufpunkt A einsetzen: $2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \checkmark$

<u>Parallelität der Ebene A'B'C'D':</u>

$\vec{A'D'} \circ \vec{n} = 8 \cdot 2 + (-8) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = 16 - 8 - 8 = 0 \checkmark$

$\vec{A'B'} \circ \vec{n} = -2 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 + 4 \cdot 2 = -4 - 4 + 8 = 0 \checkmark$

<u>Abstand der Ebene A'B'C'D':</u>

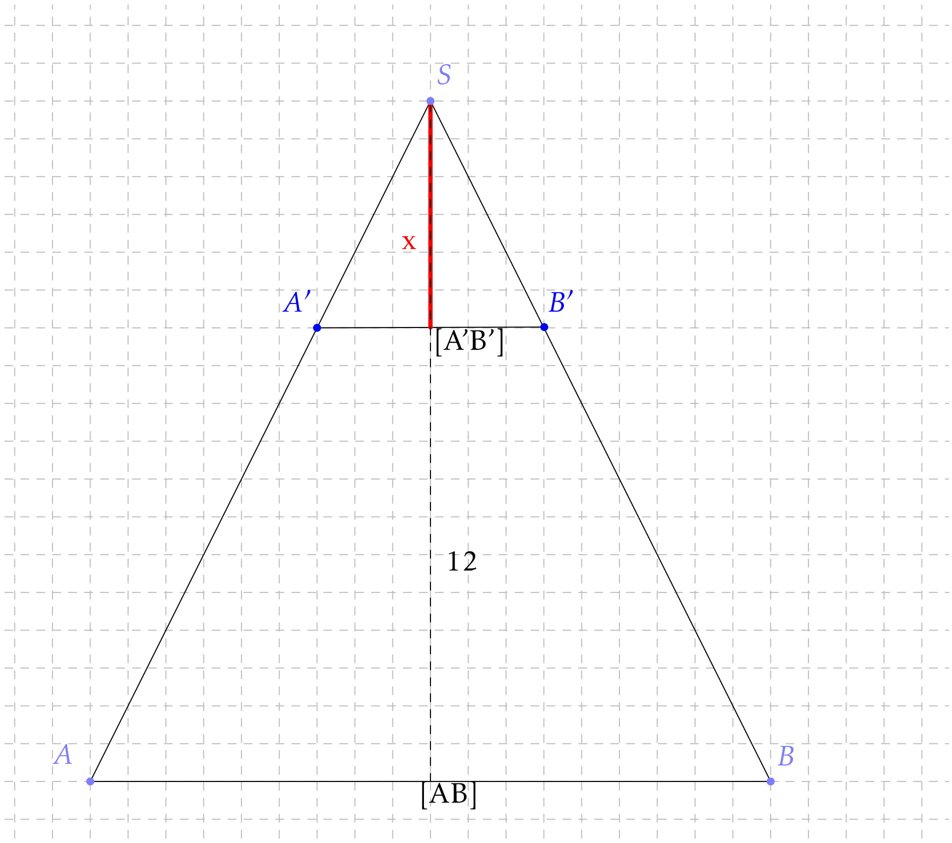
Setze z.B. A' in die HNF(E):

$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{9} = 3$

$HNF(E) : \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$

$d(A', E) = \left|\frac{2}{3} \cdot 14 + \frac{1}{3} \cdot (-8) + \frac{2}{3} \cdot 8\right| = \frac{36}{3} = 12 \checkmark$

d) Skizze:



Basislänge $\bar{A}B = \sqrt{36 + 144 + 144} = \sqrt{324} = 18$

Breite bei Höhe 12: $A'\bar{}B' = 6$

Es ergeben sich ähnliche Dreiecke, Streckenverhältnisse sind also gleich: $x : 3 = (x + 12) : 9 | \cdot 9$

$3x = x + 12 | - x$

$2x + 12 | : 2$

$x = 6$

e) $V_{Stumpf} = V_{gro} - V_{klein} = \frac{1}{3}Gh - \frac{1}{3}G'h' = \frac{1}{3}(3^2 \cdot 72) \cdot (12 + 6) - \frac{1}{3}72 \cdot 6 = 3888 - 144 = 3744$

f) Berechne den Abstand des Punktes B' von der Geraden BC:

$g : \vec{X} = \vec{B} + \lambda \cdot \vec{B}C = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ -12 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor lässt sich noch einkürzen und das ganze in Kurzform schreiben:

$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -6 + 2\lambda \\ -12 - 2\lambda \\ 12 - \lambda \end{pmatrix}$

Zur Bestimmung des Abstands von B' muss der Differensvektor $\vec{X} - \vec{B}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden stehen:

$\begin{pmatrix} -6 + 2\lambda - 12 \\ -12 - 2\lambda + 12 \\ 12 - \lambda - 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -36 + 4\lambda + 4\lambda + 1\lambda = 0$

$\Rightarrow 9\lambda = 36 \Rightarrow \lambda = 4$

Fußpunkt: $\vec{F} = \begin{pmatrix} -6 + 2 \cdot 4 \\ -12 - 2 \cdot 4 \\ 12 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}$

Abstand Fußpunkt-B': $\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5} \checkmark$

Flächeninhalt der Trapezes:

$A = \frac{1}{2}(\sqrt{24^2 + 24^2 + 12^2} + 12) \cdot 6\sqrt{5} = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 6\sqrt{5} = 108\sqrt{5}$

g) Der Mittelpunkt der Kante [BB'] berechnet sich zu:

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} + vecB'\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

Da die Bohrung senkrecht nach unten stattfindet, bleiben die x_1 und die x_2-Koordinate erhalten, die x_3-Koordinate wird 0:

$\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$