Abi 10 Lsg Geo I

1. $\vec{u}$ ist der Richtungsvektor von h, H(7|4|6) ihr Aufpunkt.

   a) Echt parallel heißt parallel aber nicht identisch. Zu zeigen also:
   - Richtungsvektoren linear abhängig
   - A liegt nicht auf h

   $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{u}$, also linear abhängig!

   Untersuche ob A auf h:

   $$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2\lambda \\ 4+3\lambda \\ 6+2\lambda \end{pmatrix}$$

   In der ersten Komponente gilt $\lambda = 5$, in der zweiten $\lambda = -\frac{2}{3}$, WIDERSPRUCH!

   Erstelle eine PaFo der Ebene:

   $E : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\left(\vec{H} - \vec{A}\right)$

   Suche den Normalenvektor:

   $$\vec{n'} = \vec{u} \times \left(\vec{H} - \vec{A}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 34 \\ -34 \end{pmatrix}$$

   $$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   damit steht schon einmal dieser Teil der KoFo fest:

   $x_1 + 2x_2 - 2x_3 + c = 0$

   und c wird aus dem Einsetzen von A bestimmt:

   $-3 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + c = 0 \Rightarrow c = -3$✓

   b) Bilde aus S und dem Normalenvektor von E eine Gerade. Ihr Schnittpunkt befindet sich in F:

   $$i : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+\sigma \\ 7+2\sigma \\ -11-2\sigma \end{pmatrix}$$

In KoFo der Ebene E:

$3 + \sigma + 2(7 + 2\sigma) - 2(-11 - 2\sigma) - 3 = 0$

$3 + \sigma + 14 + 4\sigma + 22 + 4\sigma - 3 = 0$

$36 + 9\sigma = 0 \Rightarrow \sigma = -4$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ 7-8 \\ -11+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{B}\checkmark$

$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

Um von S nach B zu kommen, muss man diesen Vektor auf das vierfache verlängern ($\lambda = -4$), also gilt:

Der Abstand von S nach B ist $d = 4 \cdot 3 = 12$.

c) Bilde zuerst die Differenzvektoren:

$\vec{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$;(s.o.) $\vec{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Winkel bei B:

$cos(\beta) = 0; \Rightarrow \beta = 90$ da B der Fußpunkt des Lotes von S auf die Ebene ist, in der A und B enthalten sind.

Winkel bei A:

$cos(\alpha) = \frac{\vec{AS} \circ \vec{AB}}{|\vec{AS}| \cdot |\vec{AB}|} = \frac{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 10}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{161}}$

$\Rightarrow \alpha = 71,04$

$\Rightarrow \gamma = 18,96$ (Winkelsumme)

d) Suche einen Punkt X der Geraden h, bei dem der Verbindungsvektor $\vec{AX}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor von h steht:

$\left(\vec{X} - \vec{A}\right) \circ \vec{u} = 0$

$$\begin{pmatrix} 7-2\lambda-(-3) \\ 4+3\lambda-2 \\ 6+2\lambda-(-1) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(10-2\lambda)\cdot(-2)+(2+3\lambda)\cdot 3+(7+2\lambda)\cdot 2=0$$

$$-20+4\lambda+6+9\lambda+14+4\lambda=0$$

$$0+17\lambda=0; \Rightarrow \lambda=0$$

Fußpunkt des Lotes von A auf h ist also der Aufpunkt H selbst. Bestimme nun den Abstand:

$$|\vec{AH}| = \sqrt{10^2+2^2+7^2} = \sqrt{9\cdot 17} = 3\sqrt{17} = \approx 12,37$$

2. a) Volumen eines Kegels: $V = \frac{1}{3}G\cdot h$

Die Grundfläche ist ein Kreis mit dem Radius $\bar{AB}$, daher gilt:

$$G = \pi r^2 = \pi \bar{AB}^2 = \pi\cdot 17 \approx 53,41$$

$$h = |\vec{BS}| = \sqrt{16+64+64} = 12$$

$$\Rightarrow V \approx \frac{1}{3}\cdot 53,41\cdot 12 = 213,63$$

b) Die Gerade BS ist das Rotationszentrum des Kegels. Die vom Zentrum am weitesten entfernten Punkte liegen auf dem 0,5 überein. Der Aufpunkt von g_A liegt für $\mu = 1$ ebenfalls in der Schnittgeraden, also sind diese Geraden identisch. Nachdem die Schnittgerade den Schnitt von T und der Spiegelebene U darstellt, stellt sie auch die Schnittgerade von T' und U dar. Also ist es auch die Schnittgerade von T' und T.

c) Der maximale Abstand der Kantenpunkte ergibt sich bei G. Abstand des Punktes G von der Ebene T:

$$T_{HNF}(X): \frac{1}{\sqrt{66}}(5x_1+4x_2+5x_3-30)$$

Setze G ein: $T_{HNF}(G) = \frac{1}{\sqrt{66}}(25+20+25-30) = \frac{40}{\sqrt{66}} \approx 13$

Der minimale Abstand der Kantenpunkte ergibt sich bei F. Abstand des Punktes F von der Ebene T:

$$T_{HNF}(F) = \frac{1}{\sqrt{66}}(25+0+25-30) = \frac{20}{\sqrt{66}} \approx 2,46$$

Alle Kantenpunkte sind mehr als 2 Einheiten von der Pyramidengrundfläche entfernt.