Abi 13 Lsg Geo I

a) A, B und D sind gegeben. C muss sich dadurch ergeben, dass der Vektor $\vec{AB}$ an D angehängt wird:

$$\vec{C} = \vec{D} + \vec{AB} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ein Quadrat ist eine Raute mit einem 90°-Winkel in einer Ecke. Zu zeigen:

- $\alpha = 90$
- $\vec{BC} = \vec{AD}$ und $|\vec{AD}| = |\vec{AB}|$.

Untersuche Winkel α:

$$\vec{AD} \circ \vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\checkmark$$

Bestimme die Längen:

$|\vec{AB}| = 10$ und $|\vec{AD}| = \sqrt{64+36} = 10\checkmark$.

b) Bestimme den Normalenvektor durch das Kreuzprodukt:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ -80 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$E: 3x_1 + 4x_2 + c = 0$

Mit Aufpunkt A ergibt sich: $3 \cdot 28 + 4 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -84$

$E: 3x_1 + 4x_3 - 84 = 0\checkmark$

c) A und D befinden sich in der x_1x_3-Ebene. Deshalb genügt es den Winkel zwischen der x_1-Achse und der Geraden durch A und D zu bestimmen:

$$\vec{u} = \vec{AD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}; |\vec{u}| = 10; \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; |\vec{v}| = 1$$

$cos(\phi) = |\frac{-8\cdot(-1)+0}{10\cdot 1}| = \frac{4}{5} \Rightarrow \phi = 36,87$

d) F ist parallel zu E, hat also den gleichen Normalenvektor. Außerdem geht F durch den Ursprung, deshalb muss c = 0 sein:

$F: 3x_1 + 4x_3 = 0.$

e) Schneidet man den Teil des Spats ab, der sich hinter der x_2x_3-Ebene befindet (Prisma) und setzt ihn vorne auf das Quadrat, so entsteht ein Quader mit Grundfläche G (an der sich nichts geändert hat) und Höhe h.

f) $G = 10 \cdot 28 = 280; h = 6; \Rightarrow V = 1680$

Der Quader umfasst also 1680 Volumeneinheiten, das entspricht 1680 Kubikdezimetern oder $1,68m^3$.

$m = V \cdot \rho = 1,68 \cdot 2,1t = 3,528t$

g) Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche:

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{PB} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gerade h: $h: \vec{X} = \vec{H} + \lambda\vec{HE} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

Für die Bestimmung des Stangenendpunktes braucht man den Richtungs-Einheitsvektor:

$$\vec{HE}_0 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Ein Viertel der Stange steckt im Beton, also 0,35m. Das entspricht 3,5 Längeneinheiten im Modell:

$$\vec{P} = \vec{H} + 3,5 \cdot \vec{HE}_0 = \vec{H} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{H} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 12,5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

h) Der Mittelpunkt der Kugel ergibt sich durch eine Erhöhung der x_3-Koordinate um 8. Die Kugel berührt die Stange wenn gilt: $d(M;h) = 8$.