Abi 13 Lsg Ana II

Teil 1

1 $f(x) = ln(\underbrace{2013 - x}_{\to\infty})$

<u>Maximaler Definitionsbereich</u>

$2013 - x > 0 \Rightarrow x < 2013 \Rightarrow D_f =]-\infty; 2013[$

<u>Verhalten an den Grenzen</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty} ln(\underbrace{2013 - x}_{\to\infty}) = \infty$

$\lim\limits_{x\to 2013} ln(\underbrace{2013 - x}_{\to 0}) = -\infty$

<u>Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen</u>

$f(0) = ln(2013) \approx 7,61 \Rightarrow S_y(0|ln(2013))$

$f(x) = 0 \Rightarrow 2013 - x = 1 \Rightarrow x = 2012 \Rightarrow S_x(2012|0)$

2 $f(x) = x \cdot sin(x)$

$f'(x) = sin(x) + x \cdot cos(x)$

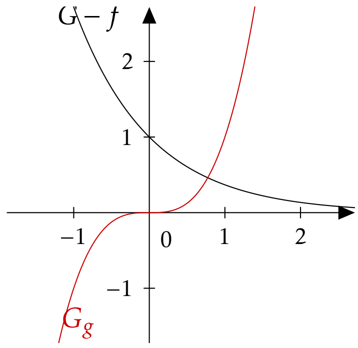
$f''(x) = cos(x) + cos(x) - x \cdot sin(x) = 2cos(x) - x\sin(x)$

$f''(0) = 2 - 0 = 2$

Der Graph ist also in unmittelbarer Nähe des Ursprungs linksgekrümmt.

3 $g : x \mapsto e^{-x}; h : x \mapsto x^3$

a) Graph:



b) $d(x) = e^{-x} - x^3$

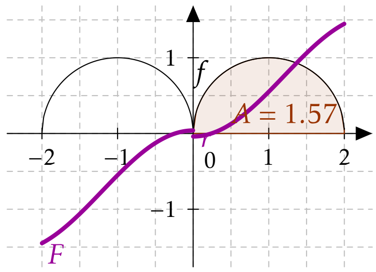
$d'(x) = -e^{-x} - 3x^2$

$x_0 = 1$; Startwert in Näherungsformel

$x_1 = x_0 - \frac{d(x_0)}{d'(x_0)} = 1 - \frac{\frac{1}{e}-1}{-\frac{1}{e}-3} \approx 0,81$

4 a) $F(0) = 0; F(2) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}; F(-2) = -\frac{\pi}{2};$

b) Graph:



Teil 2

1 $f \mapsto \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$

a) Senkrechte Asymptote: $x = -1$

Schräge Asymptote: $a(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Schnittstellen mit der schrägen Asymptote: $f(x) - a(x) = \frac{8}{x+1} \neq 0 \Rightarrow$ keine!

b) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{8}{(x+1)^2}$
$f''(x) = \frac{16}{(x+1)^3}$
$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8}{(x+1)^2}$

$16 = (x+1)^2 \Rightarrow x_1 = -5; x_2 = 3$

Lage: $f(-5) = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{-4} = -3 - 2 = -5$

und $f(3) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 1 + 2 = 3$

Art: $f''(-5) < 0 \Rightarrow$Maximum.

und $f''(3) > 0 \Rightarrow$Minimum.

2 a) $g(x)$ geht durch Verschiebung um 1 in positiver x-Richtung und Verschiebung um 1 in positiver y-Richtung aus f(x) hervor:

$g(x) = f(x-1) + 1 = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1-1} + 1$

$g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{x} + 1$

$g(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{8}{x} + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{8}{x}$

Punktsymmetrie:

$g(-x) = -\frac{1}{2}x + \frac{8}{-x} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{x}\right) = -g(x)$

punktsymmetrisch ✓

b) $\int\limits_0^4 f(x)dx = \int\limits_0^4 \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}dx$
$= [\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 8ln(x+1)]_0^4$

$= 4 - 2 + 8 \cdot ln5 - (0 - 0 + 8ln1) = 2 + 8 \cdot ln5 \checkmark$

Wegen der Punktsymmetie zu M(-1|-1) gilt:

$$\int_{-6}^{-2} f(x)dx = -\int_{1}^{5} f(x)dx - 2 \cdot (6-2)$$
$$= -10 - 8 \cdot ln5$$

3 a) $f(0) = 8 - \frac{1}{2} = 7,5$

Die leere Dose ist punktsymmetrische zum Mittelpunkt, deshalb liegt ihr Schwerpunkt genau in der Mitte, also auf halber Höhe.

$f(15) = 7,5 - 0,5 + \frac{8}{16} = 7,5$

Die volle Dose hat ihren Schwerpunkt ebenfalls in der Mitte.

b) Mit steigender Füllhöhe sinkt der Schwerpunkt zuerst von 7,5 cm aus nach unten. Bei einer Füllhöhe von 3 cm hat der Schwerpunkt seinen niedrigsten Wert erreicht und steigt anschließend mit steigender Füllhöhe, bis er die 7,5 cm wieder erreicht hat.

Nachdem x für die Füllhöhe und y für die Höhe des Schwerpunkts steht, stimmt bei 3 cm Höhe der Schwerpunkt genau mit der Höhe des Flüssigkeitsspiegels überein.

c) Wegen der Schwerpunktshöhe von maximal 5 cm sollte man die Konstante y = 5 in das Koordinatensystem eintragen. Alle x-Werte für die der Graph mit der Geraden übereinstimmt, oder für die der Graph unterhalb der Geraden liegt sind diejenigen bei denen der Schwerpunkt kleiner oder gleich 5 cm ist. Aus der Graphik liest man ab:

$0,5 \leq x \leq 9,5$

Rechnung:

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \leq 5 \mid \cdot 2(x+1)$

$x \cdot (x+1) - (x+1) + 16 \leq 10(x+1)$

$x^2 + x - x - 1 + 16 \leq 10x + 10$

$x^2 - 10x + 5 \leq 0$

$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-20}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$

$x_1 = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0,53; x_2 = 5 + 2\sqrt{5} \approx 9,47$