

## Q12: Lösungen bsv 1.3

1.

2. a)  $\int_{-2}^2 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5} = \frac{64}{5} = 12,8$

b)  $\int_{-2}^2 6x^5 dx = [x^6]_{-2}^2 = 2^6 - (-2)^6 = 0$   
(Integral über eine punktsymmetrische Funktion)

c)  $\int_{-3}^4 1 dx = [x]_{-3}^4 = 4 - (-3) = 7$

d)  $\int_{-3}^4 4\sqrt{2} dx = [4\sqrt{2}x]_{-3}^4 = 4\sqrt{2} \cdot (4 - (-3)) = 28\sqrt{2}$

e)  $\int_{-3}^4 0 dx = 0$

f)  $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = [-1 \cdot x^{-1}]_1^2 = [-\frac{1}{x}]_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = +\frac{1}{2}$

g)  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = [-\frac{1}{x}]_{-2}^{-1} = -\frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

h)  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

i)  $\int_{0,5}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{0,5}^1 = \ln(1) - \ln(2^{-1}) = 0 + \ln(2) = \ln(2)$

j)

k)  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$

l)  $\int_0^9 \sqrt{x} dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}} dx = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^9 = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 0 = 18$

m)  $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 x^{-\frac{1}{2}} dx = [2x^{\frac{1}{2}}]_1^9 = 2 \cdot 9^{\frac{1}{2}} - 2 = 4$

n)  $\int_0^9 x\sqrt{x} dx = \int_0^9 x^{\frac{3}{2}} dx = [\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}]_0^9 = \frac{2}{5} \cdot 9^{\frac{5}{2}} - 0 = \frac{2}{5} \cdot 243 = \frac{486}{5} = 97,2$

o)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = +1$

$$p) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = +1$$

$$q) \int_1^2 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^2 = 2 \ln(2) - 2 - (1 \ln(1) - 1) = 2 \ln(2) - 2 - 1 \cdot 0 + 1 = 2 \ln(2) - 1$$

r)

s)

$$t) \int_{-1}^0 e^x dx = [e^x]_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 0 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

3. Hierbei sind unbestimmte Integrale gefragt.

$$a) \int (4x + 3) dx = 2x^2 + 3x + C$$

$$b) \int (x^2 + 3x - 2) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

$$c) \int (x - 3)^2 dx = \int x^2 - 6x + 9 dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C$$

$$d) \int (6x^2 + 4x) dx = 2x^3 + 2x^2 + C$$

$$e) \int 5 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx = 5 \int \frac{1}{x^2} + x dx = 5\left(-\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C'\right) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{x} + C$$

$$f) \int \frac{1}{x^2} + x^2 dx = -\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} + C$$

$$g) \int \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-3} - x^{-2} dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + x^{-1} + c = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + c$$

$$h) \int \frac{1}{2}x + 1 + \frac{3}{2x} dx = \frac{x^2}{4} + x + \frac{3}{2} \ln(x) + c$$

$$i) \int 1 + 2 \cdot x^{-1} + 4 \cdot x^{-2} dx = x + 2 \ln(x) - 4x^{-1} + c = x + 2 \ln(x) - \frac{4}{x} + c$$

j)

k)

$$l) \int \frac{2t - \sqrt{6t}}{\sqrt{2t}} dt = \int \frac{2t}{\sqrt{2t}} - \frac{\sqrt{6t}}{\sqrt{2t}} dt = \int \frac{\sqrt{2t} \cdot \sqrt{2t}}{\sqrt{2t}} - \sqrt{\frac{6t}{2t}} dt$$

$$= \int \sqrt{2t} - \sqrt{3} dt = \int \sqrt{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3} dt = 2 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \sqrt{3} \cdot t + C$$

$$m) \int \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \right) dx = \int \sqrt{2} \cdot x^{-0,5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x^{0,5} dx = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{0,5} \cdot x^{0,5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} - 3\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$$

n)

o)

p)

$$q) \int z + e^z dz = \frac{1}{2}z^2 + e^z + C$$

$$r) \int \frac{1}{\sqrt{x}} - e^x dx = 2\sqrt{x} - e^x + C$$

$$s) \int \frac{xe^x - 1}{x} dx = \int e^x - \frac{1}{x} dx = e^x - \ln(x) + C$$

$$t) \int e^x + e dx = e^x + e \cdot x + C$$

$$u) 3 \int \ln(x) dx = 3(x \ln(x) + x) + C = 3x \ln(x) + 3x + C$$

$$v) \int \ln(x^3) dx = 3 \int \ln(x) dx = 3(x \ln(x) + x) + C = 3x \ln(x) + 3x + C$$

4.

$$5. a) f'(x) = 4 \cdot e^{4x}$$

$$b) f'(x) = 4 \cdot e^{(4x+1)}$$

$$c) f'(x) = 4 \cdot e^{(4x-5)}$$

$$d) f'(x) = -\sin(x-1)$$

$$e) f'(x) = -2\sin(2x-3)$$

$$f) f'(x) = -2\sin(2x+4)$$

$$g) F(x) = e^{4x}$$

$$h) F(x) = e^{4x}$$

$$i) F(x) = e^{x-3}$$

$$j) F(x) = \frac{1}{5}e^{5x}$$

$$k) F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+3}$$

$$l) F(x) = \frac{3}{7}e^{7x}$$

$$m) F(x) = 2\sin(2x-\pi)$$

$$6. a) \int 5 \cdot (x-3)^4 dx; \text{ Grundfunktion: } x^4; \text{ Stammfunktion: } \frac{x^5}{5} + C$$

Transformation: Verschiebung um 3 in positiver x-Richtung; Streckung mit 5 in y-Richtung;

$$\int 5 \cdot (x-3)^4 dx = 5 \cdot \frac{1}{5}(x-3)^5 + C = (x-3)^5 + C$$

$$b) \int (3x+4)^5 dx; \text{ Grundfunktion: } x^5; \text{ Stammfunktion: } \frac{x^6}{6} + C$$

Transformation: Stauchung mit 3 in x-Richtung; Verschiebung um 4 in negativer x-Richtung;

$$\int (3x+4)^5 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}(3x+4)^6 + C = \frac{1}{18}(3x+4)^6$$

$$c) \int (\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})^3 dx; \text{ Grundfunktion: } x^3; \text{ Stammfunktion: } \frac{x^4}{4}$$

Transformation: Streckung mit 2 in x-Richtung; Verschiebung um  $\frac{1}{3}$  in positiver x-Richtung;

$$\int (\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})^3 dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})^4 + C = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3})^4 + C$$

d)  $\int 6 \cdot (4 - 3x)^5 dx$ ; Grundfunktion:  $x^5$ ; Stammfunktion:  $\frac{x^6}{6} + C$

Transformation: Spiegelung an y-Achse; Stauchung mit 3 in x-Richtung; Verschiebung um 4 in negativer x-Richtung;

$$\int 6 \cdot (4 - 3x)^5 dx = -\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} (4 - 3x)^6 + C = -\frac{1}{3} (4 - 3x)^6 + C$$

e)  $\int \frac{1}{(2x-3)^2} dx$ ; Grundfunktion:  $x^{-2}$ ; Stammfunktion:  $-x^{-1} + C$

Transformation: Stauchung mit 2 in x-Richtung; Verschiebung um 3 in positiver x-Richtung;

$$\int \frac{1}{(2x-3)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (2x-3)^{-1} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-3} + C = -\frac{1}{4x-6} + C$$

f)  $\int \frac{1}{(-2x+3)^3} dx$ ; Grundfunktion:  $x^{-3}$ ; Stammfunktion:  $\frac{1}{-2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

Transformation: Stauchung mit 2 in x-Richtung, Spiegelung an der y-Achse; Verschiebung um 3 in negativer x-Richtung;

$$\int \frac{1}{(-2x+3)^3} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2(-2x+3)^2}\right) + C = \frac{1}{4(3-2x)^2} + C$$

g)  $\int \frac{1}{2x+1} dx$ ; Grundfunktion:  $\frac{1}{x}$ ; Stammfunktion:  $\ln|x| + C$

Transformation: Stauchung mit 2 in x-Richtung; Verschiebung um 1 in negativer x-Richtung;

$$\int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln|2x+1| + C$$

h)  $F(x) = 2\ln|3-4x| + C$

i)

j)

k)

l)  $F(x) = 2 \cdot \sqrt{3x-4} + C$

m)

n)

o)

p)

q)  $\int e^{-2x} dx$ ; Grundfunktion  $e^x$ ; Stammfunktion:  $e^x + C$

Transformation: Spiegelung an der y-Achse; Stauchung mit 2 in x-Richtung;

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

r)

s)

t)  $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \int (e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2 dx = \int e^{2x} + 2 + e^{-2x} dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

u)  $\int \ln(2x) dx$ ; Grundfunktion:  $\ln(x)$ ; Stammfunktion:  $x \cdot \ln(x) - x + C$

Transformation: Stauchung mit 2 in x-Richtung;

$$\int \ln(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot (2x \cdot \ln(2x) - 2x) + C = x \cdot \ln(2x) - x + C$$

v)  $\int \ln(2-x) dx$ ; Grundfunktion:  $\frac{1}{n}(x)$ ; Stammfunktion:  $x \ln(x) - x + C$

Transformation: Spiegelung an y-Achse; Verschiebung um 2 in negativer x-Richtung;

$$\int \ln(2-x) dx = -((2-x) \cdot \ln(2-x) - (2-x)) + C = (x-2) \cdot \ln(2-x) + x - 2 + C$$

7. a) I  $f(x) = x^2 + 1$  hat als Wertebereich  $[1; +\infty]$ , da  $x^2$  außer Null nur positive Werte annehmen kann.

II  $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ , siehe oben

III  $f(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 3) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1 + 2) = 2 \cdot ((x+1)^2 + 2) > 0$

b) I  $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx = \ln(x^2-4x+5) + C$ , da  $x^2-4x+5 = x^2-4x+4+1 = (x-2)^2+1 \geq 1$ .

II  $\int \frac{4x+4}{2x^2+4x+7} dx = \ln(2x^2+4x+7) + C$ ; auch keine Betragsstriche, siehe 7aIII

8. a)  $\ln(x^2+2) + C$

b)  $\ln(x^2 + x + 1) + C$ ; keine Betragsstriche, da der Scheitelpunkt bei  $f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$  und  $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 > 0$  und die Parabel nach oben geöffnet ist.

c)  $\frac{1}{3} \ln|x^3 - 2| + C$

d)  $\frac{1}{5} \ln|5x + 4| + C$

e)  $\frac{1}{2} \ln(3x^2 - 2x + 4) + C$ , keine Betragsstriche. Überprüfung wie oben.

f)  $\ln(e^x + x) + C$

g)  $\ln(e^{2x} + e) + C$

h)

i)  $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\int -\sin(x) \cos(x) = -\int f'(x) f(x) = -\ln(\cos(x)) + C$

9. a) I  $g(x) = e^{x^2+1}$

Ableiten und nachdifferenzieren:  $g'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x$

II  $g(x) = e^{x^2-2x+2} \Rightarrow g'(x) = e^{x^2-2x+2} \cdot (2x-2)$

III  $g(x) = e^{\sin(x)} \Rightarrow g'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$

b) I  $g(x) = e^{x^2+1} + C$

10. a)  $\int 4 \cdot e^{2x} dx = 2 \int 2 \cdot e^{2x} dx = 2 \cdot e^{2x} + C$

b)  $2 \cdot e^{x^2} + C$

c)  $-\frac{1}{4} e^{1-4x} + C$

d)

11. Grundwissen: Umformen von Logarithmen

12. Grundwissen: Logarithmische Rechenregeln

13. a)  $f'(x) = \frac{1}{18}(3x^2 - 18x) = \frac{1}{6}(x^2 - 6x)$

$f'(x) = \frac{1}{6}x \cdot (x - 6) \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 6;$

| VZT     | $x < 0$    | $x = 0$ | $0 < x < 6$ | $x = 6$ | $x > 6$    |
|---------|------------|---------|-------------|---------|------------|
| $f'(x)$ | +          | 0       | -           | 0       | +          |
| $g_f$   | $\nearrow$ | HOP     | $\searrow$  | TIP     | $\nearrow$ |
|         |            | (0 6)   |             | (6 0)   |            |

b)  $f''(x) = \frac{1}{6}(2x - 6) = 0 \Rightarrow x_3 = 3;$

Wendepunkt WEP(3|3)

c)  $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 108 = 0$

Aus Monotonie: doppelte Nullstelle bei  $x_2 = 6$

Polynomdivision:

$$(x^3 - 9x^2 + 108) : (x - 6)^2$$

$$(x^3 - 9x^2 + 108) : (x^2 - 12x + 36) = x + 3$$

$$\Rightarrow x^3 - 9x^2 + 108 = (x - 6)^2 \cdot (x + 3)$$

$$\Rightarrow 2. \text{ Nullstelle: } x = -3;$$

d) Wendetangente:

$$m = f'(3) = -\frac{9}{6} = -1,5$$

$$3 = -1,5 \cdot 3 + t \Rightarrow t = 7,5$$

Gleichung der Wendetangente:

$$W(x) = -1,5x + 7,5$$

Flächeninhalt: Suche noch die Nullstelle der Wendetangente  $W(x) = 0 \Rightarrow x = 5$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7,5 = 18,75$$

$$e) \int_0^6 f(x) dx = \int_0^6 \frac{x^3}{18} - x^2 + 6 dx = \left[ \frac{x^4}{72} - \frac{x^3}{3} + 6x \right]_0^6 = 18$$

$$\frac{18}{18,75} = 0,96 = 96\%.$$

14. a) Das Produkt kann so nicht integriert werden. Man müsste  $(1 - x)^{99}$  in eine Summe umwandeln, was aber sehr großen Rechenaufwand erfordert.
- b) Gesucht ist eine Möglichkeit, den Term  $(1 - x)^{99}$  durch eine Verschiebung des Graphen zu vereinfachen und über den verschobenen Graphen zu integrieren.

Verschiebung um 1 in negativer Richtung bewirkt folgende Termänderung:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x+1)(1-(x+1))^{99} dx &= \int_{-1}^0 (x+1) \cdot x^{99} dx = \int_{-1}^0 x^{100} dx + \int_{-1}^0 x^{99} dx = \\ &= \left[ \frac{x^{101}}{101} \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{x^{100}}{100} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{101} + \frac{1}{100} \end{aligned}$$

$$= -\frac{100}{10100} + \frac{101}{10100} = \frac{1}{10100}$$