Q11: Lösungen bsv 2.2

1. a) $f'(x) = 4x^3$ $g'(x) = 6x^5$ $h'(x) = 13x^{12}$ $u'(x) = 0$ $v'(x) = x^{2n-1}$

   b) Steigungen:
   A $f'(x) = 5x^4$ $f'(-1) = 5 \cdot (-1)^4 = 5$

   B $g'(x) = 6x^5$ $g'(-1) = 6 \cdot (-1)^5 = -6$

   C $h'(x) = 4x^3$ $h'(\sqrt{2}) = 4 \cdot (\sqrt{2})^3 = 4 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \approx 11,31$

   D $h'(x) = 4x^3$ $h'(\sqrt{a}) = 4 \cdot (\sqrt{a})^3 = 4 \cdot a^{\frac{3}{2}}$

   E $u'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $u'(1) = n \cdot 1^{n-1} = n$

   F $v'(x) = (2n+1) \cdot x^{2n}$ $v'(-1) = (2n+1) \cdot 1 = 2n+1$

2.

3. a) $f(x) = 2x^3; f'(x) = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$
   b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4; f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 = 2x^3$
   c) $f(x) = 2^3 \cdot x = 8x; f'(x) = 8 \cdot 1x^0 = 8$
   d) $f(x) = 3^2 = 9; f'(x) = 0$
   e) $f(x) = 2^3 \cdot x^3 = 8 \cdot x^3; f'(x) = 8 \cdot 3x^2 = 24x^2$
   f) $f(x) = (2x)^5 = 2^5 \cdot x^5 = 32 \cdot x^5; f'(x) = 32 \cdot 5x^4 = 160x^4$

4.

5. a) $f'(x) = 2x + 2$
   b) $g'(x) = 3$
   c) $h'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 14x + 4$
   d) $s'(x) = x^3 - 5x^2 + x - 5$
   e) $u'(x) = -12x^5 + 12x$
   f) $v'(x) = \frac{\sqrt{8}}{2}x^2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}x - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x-1)$
   g) $w'(x) = 2x$
   h) $v'(x) = -10x^9$
   i) $A'(r) = 2\pi r$
   j) $A'(r) = 2\pi r$
   k) $V'(r) = 4\pi r^2$

l) $f'(x) = 2ax$

m) $f'(x) = 2ax + 2$

n) $f'(x) = 3x^2$

o) $f'(x) = -2a^2x$

p) $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2$

6.

7. a) Erst als Summe schreiben, dann geht es leichter: $f(x) = -3x^3 - 3x - 9 \Rightarrow f'(x) = -9x^2 - 3$

   b) $f(x) = 5(x+3x^3-2x^4) = 5x+15x^3-10x^4$ $f'(x) = 5+45x^2-40x^3 = 5(1+9x^2-8x^3)$

   c) $g'(x) = -\frac{1}{5}(20x^3 - 10x^4)$

   d) $h'(x) = \frac{6x^2-6x}{3}$

   e) $u'(x) = \frac{4\sqrt{2}x+9\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4x + 9\sqrt{3}x^2 - 1$

   f) $v'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{8} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16} = 2$

   g) In Summe umwandeln: $w(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x;$ $\qquad w'(x) = 6x^2 - 6x + 4$

   h) In Summe umwandeln: $f(x) = x^2 - 2x + 1;$ $\qquad f'(x) = 2x - 2$

   i) In Summe umwandeln: $g(x) = 4x^4 - 9;$ $\qquad g'(x) = 16x^3$

   8. $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

   $g(x) = x^2+c$ bedeutet eine Verschiebung der Normalparabel um c in y-Richtung. Dabei verändern sich die Werte der Tangentensteigung nicht.

   $g'(x) = 2x\checkmark$

   b) $h(x) = (x-b)^2$ bedeutet eine Verschiebung der Normalparabel um b in x-Richtung. Bei diesem Graphen muss sich die Tangentensteigung mitverschieben:

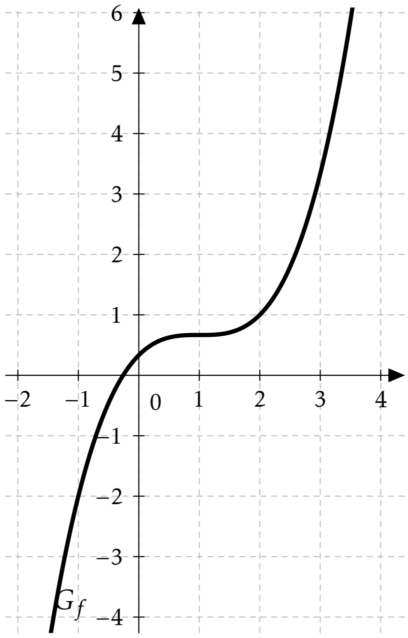
   $h(x) = x^2 - 2bx + b^2;$ $\qquad h'(x) = 2x - 2b = 2(x-b)\checkmark$

   c) $u(x) = ax^2$ bedeutet eine Streckung mit a in y-Richtung. Dabei ver-a-facht sich der Wert der Tangentensteigung:

   $u'(x) = a \cdot 2x\checkmark$

9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \frac{1}{3}$

   $f'(x) = x^2 - 2x + 1$



a) y-Wert an der Stelle $x = -1$:

$f(1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 1 + \frac{1}{3} = -2$

Die Gleichung der Tangente (lineare Funktion) lautet: $T(x) = mx + t$

Steigung m dieser Tangente:

$m = f'(1) = (-1)^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 4$

y-Abschnitt: Punkt $P(-1|-2)$ einsetzen:

$-2 = 4 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = +2$

Gesamte Tangentengleichung:

$T(x) = 4x + 2$

Steigungswinkel:

Im Steigungsdreieck gilt für $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ z.B. $\Delta y = 2; \Delta x = 1$

$tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \Rightarrow \alpha = 63,43$

b) Winkel $45° \Rightarrow \Delta y = \Delta x \Rightarrow m = f'(x) = 1$

Setze also $f'(x) = 1$ und untersuche für welche x-Werte das erfüllt ist:

$1 = x^2 + 2x + 1$

$0 = x^2 + 2x \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1;$

Der Graph hat bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 1$ jeweils eine Tangente, die die x-Achse im 45°-Winkel schneidet.

c) Einen negativen Steigungswinkel würde man nur für negative Steigungswerte erhalten. Es gilt aber:

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0.$

10.

11. a) Scheitelpunktsform $f(x) = (x-1)^2; \qquad g(x) = (x+1)^2$

f ist eine um 1 nach rechts, g eine um 1 nach links verschobene Normalparabel.

$f(x) = g(x)$

$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$-2x = 2x$

$x = 0; \qquad f(0) = g(0) = 1.$

Die Graphen treffen sich auf der y-Achse in $S(0;1)$

$f'(x) = 2x - 2; \qquad g'(x) = 2x + 2$

$f'(0) = -2; \qquad g'(0) = +2$

$tan(\alpha) = -2 \Rightarrow \alpha_f = ...; tan(\alpha) = +2 \Rightarrow \alpha_g = ...$

Schnittwinkel: $\alpha_f - \alpha_g = ...$

b)

12. a) $y = 2x \Rightarrow m = 2 \Rightarrow n = -\frac{1}{2}$

P verwenden:

$3 = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + t \Rightarrow t = 2,5$

$y_n = -\frac{1}{2}x + 2,5$

b) $y = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow m = \frac{2}{3} \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$

P verwenden:

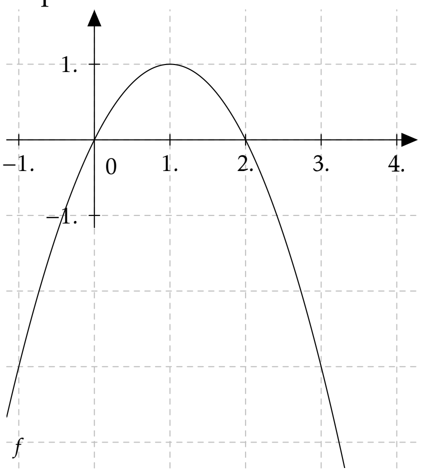
$3 = -\frac{3}{2} \cdot 1 + t \Rightarrow t = 4,5$

$y_n = -\frac{3}{2}x + 4,5$

13. a)

b)

c) Graph:



$f'(x) = -2x + 2; f'(1) = 0$

$y_P = f(1) = 1$

Tangente: $y = 1$

Normale: $x = 1$

14. Geradengleichung:

$y = 3 - \frac{3}{4}x$

Berechne P:

$y_P = 3 - \frac{3}{4} \cdot 2 = 1,5$

Wo schneidet die Normale die x-Achse? Wie lautet die Gleichung der Normalen? $m_N = \frac{4}{3}$; Zur Berechnung von t_N muss der Punkt P verwendet werden:

$1,5 = \frac{4}{3} \cdot 2 + t_N$

$\Rightarrow t_N = 1,5 - \frac{8}{3} = \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6}6 = -\frac{7}{6}$

Normalengleichung:

$y_N = \frac{4}{3}x - \frac{7}{6}$

Nullstelle:

$0 = \frac{4}{3}x - \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{4}{3}x = \frac{7}{6} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} = \frac{7}{8}$

Flächeninhalt des Dreiecks mit der Grundlinie auf der x-Achse:

$A_k = \frac{1}{2}g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3,125 \cdot 1,5 = 2,34375$

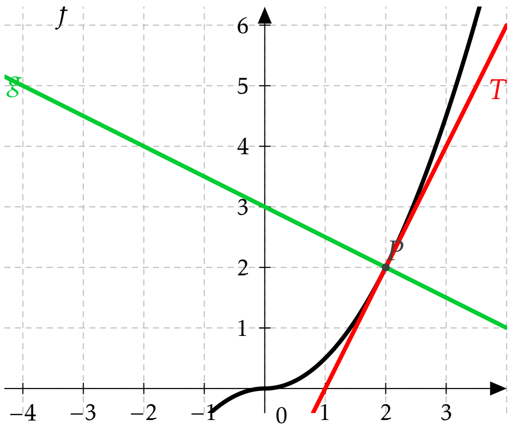
Flächeninhalt des gesamten Dreiecks:

$A_G = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$

$\frac{A_k}{A_G} = 0,390625 \approx 39,1\%$

15. Tangente und Normale

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$



$f'(x) = x$

$f(2) = 2 \Rightarrow P(2|2)$

Gleichung der Tangente: $T(x) = mx + t$

$m = f'(2) = 2$

$2 = 2 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -2$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

$f(2) = 2 \Rightarrow P(2|2)$

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2$

$f'(2) = 3 \Rightarrow m_T = 3 \Rightarrow y_T = 3 \cdot x + t_T$

$y_P = 3 \cdot x_P + t_T$

$2 = 3 \cdot 2 + t_T \Rightarrow t_T = 2 - 6 = -4$

$y_T = 3 \cdot x - 4$

Normale: $m_N = -\frac{1}{3}$

$y_N = -\frac{1}{3} \cdot x + t_N$

$2 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + t_N \Rightarrow t_N = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$y_N = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{8}{3}$

16. Gleichung der Geraden g:

    $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$

    $t = 3$

    $y = -\frac{3}{4} \cdot x + 3$

    $y_p = g(2) = -\frac{3}{4} \cdot 2 + 3 = 1,5$

    Steigung des Lotes: $n = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{4}{3}$

    P verwenden: $1,5 = \frac{4}{3} \cdot 2 + t \Rightarrow t = 1,5 - \frac{8}{3} = \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{9}{6} - \frac{16}{6} = -\frac{7}{6}$

    $y_n = \frac{4}{3} \cdot x - \frac{7}{6}$

    Das große Dreieck hat den Flächeninhalt: $A_g = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

    Das kleine rechte Dreieck hat die Höhe 1,5. Für die Grundlinie muss der Schnittpunkt von n mit der x-Achse berechnet werden:

    $y_n = 0 = \frac{4}{3} \cdot x - \frac{7}{6}$

    $\frac{7}{6} = \frac{4}{3} \cdot x \qquad | \cdot 6$

    $7 = 8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{7}{8}$

    Grundlinie des Dreiecks: $g = 3 + \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$

    $A_K = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{75}{32} = 2,34375$

    $A_R = A_G - A_K = 3,65625$

    $\frac{A_K}{A_R} = 0,641025641026 \approx 64\%$

17. Von jedem etwas

    $f(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = x^2 \cdot (-\frac{1}{18}x + \frac{1}{2})$

$f'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + x = x \cdot (-\frac{1}{6}x + 1)$

a) - Der Graph besitzt eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$, also ist der dritte Graph schon einmal ausgeschlossen.
   - $\lim_{x\to\infty} \to -\infty$, da x^3 gewinnt, also bleibt nur Graph eins übrig.

b) $f'(x) = -\frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{1}{6}x^2 + x = -\frac{9}{2}$

   Quadratische Gleichung:

   $-\frac{1}{6}x^2 + x + \frac{9}{2} = 0| \cdot 6$

   Mitternachtsformel:

   $x_{1/2} = \frac{-1\pm\cdot\sqrt{1-4(-\frac{1}{6})\cdot\frac{9}{2}}}{-\frac{2}{6}} = \frac{-1\pm 2}{-\frac{1}{3}} = -3 \cdot (-1 \pm 2)$

   $x_1 = (-3) \cdot (-3) = 9; \qquad x_2 = 1 \cdot (-3) = -3$

   sind die beiden Stellen, bei denen die Tangente am Graphen eine Steigung von -4,5 besitzt.

c) Wenn diese Gerade Tangente ist, dann muss sie
   - einen Punkt mit dem Graphen gemeinsam haben
   - an dieser Stelle die gleiche Steigung besitzen

   Unter Berücksichtigung von Teilaufgabe b) gibt es nur zwei Stellen mit der Steigung -4,5. Aber nur die Tangente bei $x_1 = 9$ kann einen positiven y-Achsenabschnitt besitzen. Zur Überprüfung setzen wir noch den entsprechenden Punkt in die Geradengleichung ein:

   $f(9) = 0; g(0) = -\frac{81}{2} + \frac{81}{2} = 0\checkmark$

   g ist also Tangente an G_f.

d) Zur Bestimmung der Tangentengleichung wird wiederum m und t benötigt.

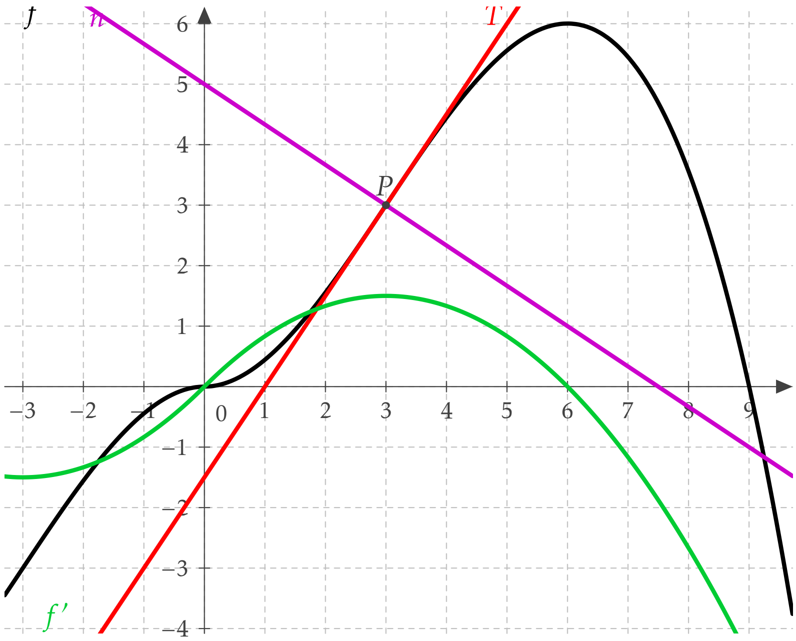
   Bestimmung von m über die Ableitungsfunktion an der Stelle 3:

   $m = f'(3) = -\frac{1}{6}(3)^2 + 3 = -1,5 + 3 = 1,5$

   Bestimmung von t über den Punkt $P(3|f(3)) = P(3|3)$

   $3 = 1,5 \cdot 3 + t \Rightarrow t = -1,5$

$\Rightarrow T(x) = 1,5x - 1,5$



e) Höhe des Dreiecks: $h = 3$

Länge der Grundlinie: $g = 7,5 - 1 = 6,5$

Gesamter FI: $A = \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 3 = 9,75$

f) Steigung der Normalen: $m_n = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{1{,}5} = -\frac{2}{3}$

Bestimmung von T über gemeinsamen Punkt $P(3|3)$:

$3 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + t \Rightarrow t = 3 + 2 = 5$

$n(x) = -\frac{2}{3}x + 5$