Abi 84 Lsg Geo I

1. a) Setze den Punkt mit der Parameterform der Geraden gleich:

   $\vec{A} = \vec{X}$

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

   $(I) 1 = -2 - 3\sigma$
   $(II) 2 = 4 + 2\sigma$
   $(III) 1 = 7 + 6\sigma$

   aus (III) folgt: $\sigma = -1$. Überprüfe diesen Wert in (I) und (II):

   $(I) 1 = -2 - 3 \cdot (-1)$ ok
   $(II) 2 = 4 + 2 \cdot (-1)$ ok

   A liegt also auf der Geraden.

   b) Die Geraden sind parallel und nicht identisch wenn gilt:

   - Der Vektor von B nach C muss linear abhängig vom Richtungsvektor von g sein:

     $\vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ -4-(-2) \\ 4-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \vec{u}$ ok!

   - Ein Punkt der Gerade BC darf nicht auf g liegen.

     $\vec{B} = \vec{X}$ muss einen Widerspruch ergeben:

     $(I) 0 = -2 - 3\sigma \Rightarrow \sigma = -\frac{2}{3}$ in (II)

     $(II) -2 = 4 + 2 \cdot (-\frac{2}{3})$ ↯

   Die Geraden sind also parallel und nicht identisch.

   c) Da die Richtungsvektoren der beiden Geraden parallel sind, lassen sie sich nicht beide als Richtungsvektoren für die Pafo der Ebene verwenden. Dafür verwendet man den Verbindungsvektor eines Punktes der Gerade g zu einem Punkt der Gerade h. Damit ergibt sich folgender Ansatz:

   $E : \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \vec{AB}$

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$

$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$

Jetzt wird der Normalenvektor benötigt:

$\vec{n}' = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ -21 \\ -14 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - n_0 = 0$

Aufpunkt einsetzen:

$6 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 - n_0 = 0$

$-12 + 12 + 14 - n_0 = 0 \Rightarrow n_0 = 14$

$E: 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 14 = 0$

d) Zur Abstandberechnung muss E noch in die HNF gebracht werden:

$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$

HNF(E): $\frac{6}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 - 2$

Ein Punkt von F ist durch seine Parameterform gekennzeichnet:

$\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 + \lambda \\ -1 + 2\mu \\ -10 - 3\lambda - 3\mu \end{pmatrix}$ in die HNF(E) einsetzen:

$d(E, P) = \frac{6}{7}(-2 + \lambda) + \frac{3}{7}(-1 + 2\mu) + \frac{2}{7}(-10 - 3\lambda - 3\mu) - 2$

$= -\frac{12}{7} + \frac{6}{7}\lambda - \frac{3}{7} + \frac{6}{7}\mu - \frac{20}{7} - \frac{6}{7}\lambda - \frac{6}{7}\mu - 2 = -5 - 2 = -7$

Die Ebenen sind also parallel und haben den Abstand 7 LE. Punkte von F erreicht man, indem man zu Punkten von E einen negativen Normalenvektor addiert.

2. a) STANDARDWEG:

Aufpunkt: A. Richtungsvektor: $\vec{n}$:

$k : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

in Kofo von F einsetzen um den Schnittpunkt zu erhalten.

Aus Teilaufgabe 1d ist bekannt, das die Ebenen parallel sind (also den gleichen Normalenvektor besitzen). Für die KoFo von F muss also nur noch deren Aufpunkt in folgende Gleichung eingesetzt werden:

$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - n_0 = 0$

$6 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-10) - n_0 = 0$

$-12 - 3 - 20 - n_0 = 0 \Rightarrow n_0 = -35$

$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 35 = 0$

Nun die Geradengleichung von k einsetzen:

$6(1 + 6\tau) + 3(2 + 3\tau) + 2(1 + 2\tau) + 35 = 0$

$6 + 36\tau + 6 + 9\tau) + 2 + 4\tau) + 35 = 0$

$49 + 49\tau = 0 \Rightarrow \tau = -1$

$\vec{D} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 2-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

MIT KÖPFCHEN:

Die beiden parallelen Ebenen sind genau eine Länge des negativen Normalenvektors voneinander entfernt. Um also den Punkt D zu erhalten muss lediglich zum Ortsvektor von A ein negativer Normalenvektor addiert werden:

$\vec{D} = \vec{A} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 2-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{DA} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$cos(\psi) = \frac{\vec{DA} \circ \vec{DC}}{\overline{DA} \cdot \overline{DC}}$

$cos(\psi) = \frac{48-9+10}{7 \cdot \sqrt{98}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \psi = 45$

3. $h : \vec{B} + \gamma \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

   $x_2 = 0 \Rightarrow -2 - 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -1$

   $\vec{T} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

   Für die Teilung sind die jeweiligen γ zu betrachten:

   $B \rightarrow C : \gamma = 1$

   $B \rightarrow T : \gamma = -1$

   B liegt also genau in der Mitte zwischen T und C