Abi 12 Lsg Geo I

a) Parameterform von E (A Aufpunkt, Vektoren nach B und C als Richtungsvektoren):

$$E:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda'\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\mu'\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$E: x_2+2x_3-n_0=0$

Aufpunkt einsetzen:

$2+2\cdot 3-n_0=0 \Rightarrow n_0=8$

$E: x_2+2x_3-8=0$

b) Zur Abstandsberechnung wird die Hesse-Normalform benötigt:

$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$

HNF(E): $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(x_2+2x_3-8)$

Abstand von R durch Einsetzen von R:

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(0+2\cdot 0-8)=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8}{5}\sqrt{5}$

c) G(2|4|2) ist (laut Angabe) der erste Eckpunkt des Fensters. Die Gerade GL muss parallel zur Geraden CD sein, sonst wäre GHKL kein Rechteck. CD verläuft in x_1-Richtung, da sich beide Punkte nur in x_1 unterscheiden. Also verläuft GL ebenfalls parallel zu x_1. Daraus ergeben sich für L (mit Abstand 1 von von G) die Koordinaten L(1|4|2) und für H und K, die mit ihren x_1-Koordinaten jeweils G und L entsprechen aber auf CD liegen H(2|6|1) und K(1|6|1).

Für den Flächeninhalt benötigt man noch die Länge der längeren Rechteckseite, also:

$$\left|\vec{G}-\vec{H}\right|=\left\|\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{5}$$

$A_{Rechteck}=1m\cdot\sqrt{5}m=\sqrt{5}m^2$

d)
- Die Seitenwand OPQR entspricht der x_1x_3-Ebene.

- Die Gerade wird durch den Aufpunkt G und den angegebenen Richtungsvektor beschrieben:

  $$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Spurpunkt muss die x_2-Koordinate 0 sein: $0 = 4 - 8\sigma \Rightarrow \sigma = 0,5$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

Zur Winkelberechnung nimmt man den Normalenvektor $\vec{e_2}$ auf OPQR $sin(\psi) = \frac{\vec{e_2} \circ \vec{v}}{e_2 \cdot v}$ mit $e_2 = 1$ und $v = \sqrt{69}$.

$sin(\psi) = \frac{-8}{\sqrt{69}} \approx -0,96 \Rightarrow \psi = -74,4$

e) Der Mittelpunkt der Strecke GH berechnet sich über das arithmetische Mittel der Ortsvektoren:

   $\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{G} + \vec{H}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ Die Achse befindet sich also auf einer Höhe von 1,5m über dem Boden (x_3-Koordinate). Um den Boden zu berühren müsste die Hälfte der Fensterlänge also 1,5m betragen:

   $\frac{l}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,12 < 1,5$

   Das Fenster kann den Boden nicht berühren.

f) Durch Abmessen ergibt sich, dass die Höhe etwa 6,5 mal in die Breite hineinpasst. Also gilt:

   $b = 6,5 \cdot 0,4m \approx 2,6m$

   Gesucht ist weiterhin der Abstand der Geraden k von der Wand unter dem Fenster, also von der zu x_1x_3-parallelen Ebene, die durch C und D geht. Da beide Objekte parallel zu x_1 verlaufen, lässt sich der Abstand aus dem Unterschied der x_2-Komponenten ablesen: $d = 6 - 5,5 = 0,5$

   Nun muss der Abstand der Fensterdrehachse von der dazu parallelen Geraden k ausgerechnet werden. Da die Geraden parallel sind, reicht es den Abstand des Punktes M von k zu bestimmen. Der Fußpunkt von M muss den gleichen x_1-Wert besitzen wie M, da die Geraden ja parallel sind.

$$\Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{M} - \vec{F}\right| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5,5 \\ 0,4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 1,1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-0,5)^2 + 1,1^2} = \sqrt{1,46}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,12; \sqrt{1,46} \approx 1,21 > 1,12 = \frac{l}{2}$$

Das Fenster stößt nicht an.