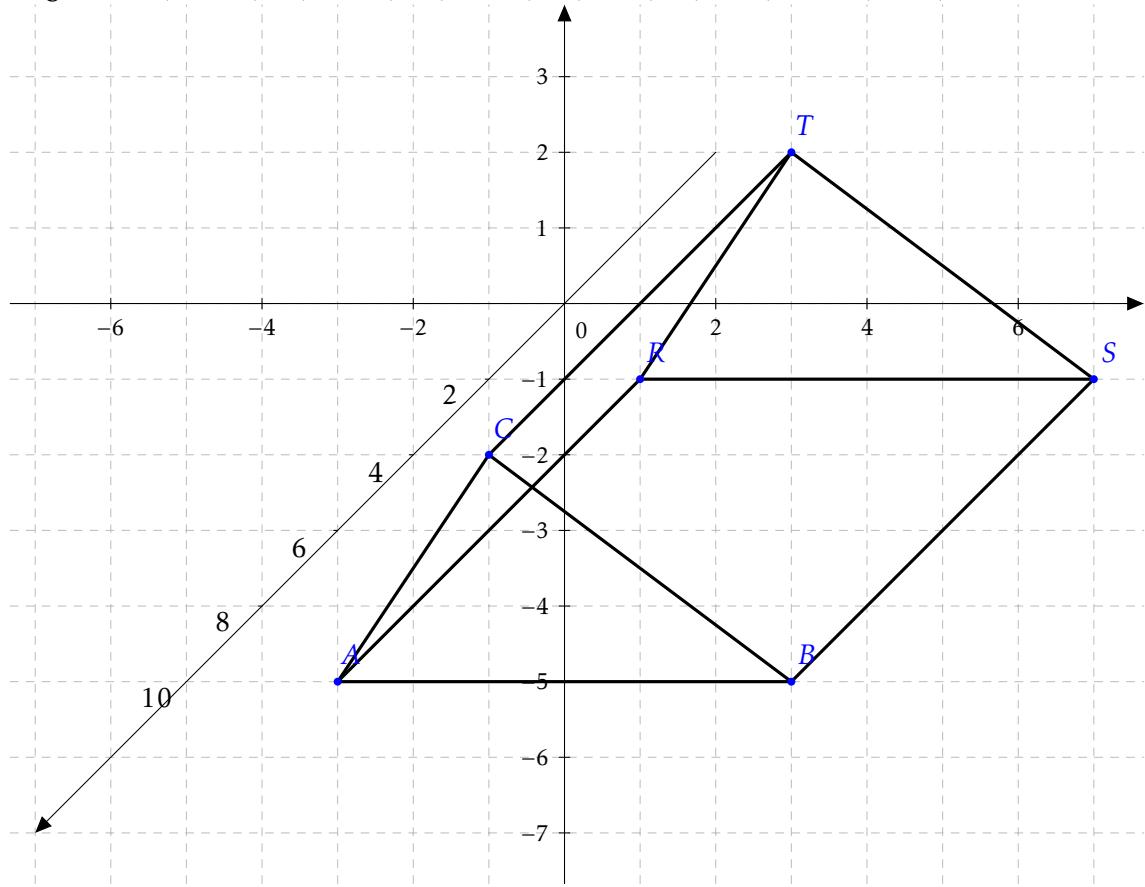


Abi 12 Lsg Geo II 1

- a) Gegeben: A(10|2|0), B(10|8|0), C(10|4|3), R(2|2|0), S(2|8|0) und T(2|4|3)



Die Punkte A, B und C besitzen alle die gleiche x_1 -Koordinate. Also ist die Grundfläche ΔABC parallel zur x_2x_3 -Ebene.

Volumen des Prismas: $V = G \cdot h$

G ist wiederum die Fläche des Dreiecks ABC, dessen Flächeninhalt sich leicht aus dem Koordinatensystem erschließt:

Nimmt man [AB] als Grundlinie, dann gilt $g = 6; h' = 3 \Rightarrow G = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$

Die Höhe h des Prismas beträgt $h = 8$, also gilt: $V = 9 \cdot 8 = 72$

- b) Nehmen wir als Aufpunkt B und von dort aus die Vektoren nach S und nach C, dann ergibt sich folgende PaFo von E:

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ oder einfacher:}$$

$$E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor mit Hilfe des Vektorproduktes:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform:

$$-3x_2 - 4x_3 - n_0 = 0$$

Aufpunkt einsetzen:

$$-3 \cdot 8 - 4 \cdot 0 - n_0 = 0$$

$$-24 - n_0 = 0 \Rightarrow n_0 = -24 \text{ Das führt zur KoFo:}$$

$$E : -3x_2 - 4x_3 + 24 = 0$$

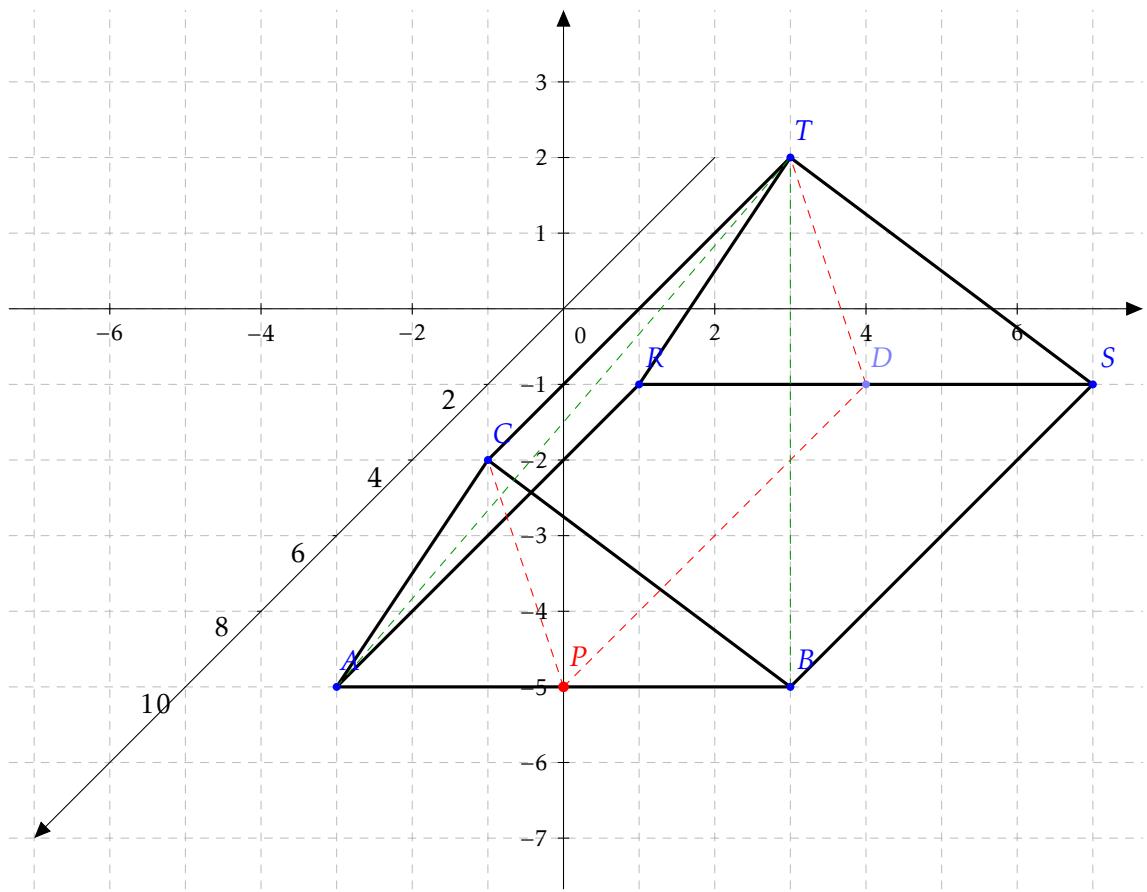
entspricht dem Zwischenergebnis bis auf die Vorzeichen.

c) $\cos(\psi) = \frac{\vec{CA} \circ \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|}$

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}; |\vec{CA}| = \sqrt{13}; \vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}; |\vec{CB}| = \sqrt{25} = 5;$$

$$\cos(\psi) = \frac{0-8+9}{\sqrt{13} \cdot 5} = 0,05547 \Rightarrow \psi \approx 86,8$$

- d) Um das Volumen zu halbieren muss die Dreiecksgrundfläche ABC halbiert werden. Sinnvoll ist es deshalb die Grundlinie zu halbieren und den Punkt P auf die Mitte zwischen A und B zu legen. Daraus ergeben sich zwei Grundflächen gleichen Inhalts, die darüberliegenden Teilprismen müssen also auch den gleichen Volumeninhalt besitzen.



- e) Es handelt sich bei dem entstehenden Körper um ein Pyramide. Da diese die gleiche Höhe wie das Prisma besitzt, deren Volumen allerdings nur $V = \frac{1}{3}G \cdot h$ beträgt, ergibt sich insgesamt ein Verhältnis von 1:2 für die beiden entstandenen Teilkörper des Prismas.
- f) Der Abstand des Punktes M von der Ebene E, die durch das Rechteck BSTC aufgespannt wird, entspricht dem Radius der gesuchten Kugel. Benötigt wird also die Hesse-Normalform von E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{n}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = 5$$

Also lautet die Hessennormalform von E:

$$E : \frac{3}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 - \frac{24}{5}$$

Nun wird M eingesetzt:

$$\frac{3}{5} \cdot 6,5 + \frac{4}{5} \cdot 3 - \frac{24}{5} = \frac{7,5}{5} = 1,5$$

Berechnung der Position von W: Addiere zum Punkt M das -1,5-fache des Normaleneinheitsvektors:

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 3 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}$$

- g) Definiere die Gleichung der Geraden auf der der Mittelpunkt entlang läuft:
Aufpunkt ist M, die Richtung ist parallel zu \vec{CB}

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wenn die Kugel den Fußboden erreicht, dann muss sich der Kugelmittelpunkt auf der Höhe $x_3 = 1,5$ befinden, betrachte also folgende Gleichung für die x_3 -Koordinate:

$$3 - 3\lambda = 1,5 \Rightarrow \lambda = 0,5$$

Der Weg entspricht also der halben Länge des Richtungsvektors:

$$s = 0,5 \cdot |\vec{CB}| = 2,5 \text{ (mit den Ergebnissen aus den vorhergenden Aufgaben)}$$