Mathematik

Abiturprüfung 2015

Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \left(x^3 - 8\right) \cdot (2 + \ln x)$ mit maximalem Definitionsbereich D.

1 **a)** Geben Sie D an.

2 **b)** Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

2 Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

3 **a)** Abbildung 1 zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

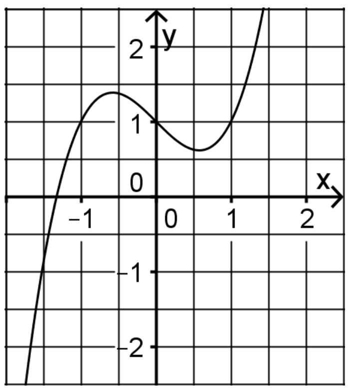


Abb. 1

2 **b)** Die erste Ableitungsfunktion von h ist h'.

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$.

1 **3** **a)** Geben Sie einen positiven Wert für den Parameter a an, sodass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \sin(ax)$ eine Nullstelle in $x = \frac{\pi}{6}$ hat.

2 **b)** Ermitteln Sie den Wert des Parameters b, sodass die Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x^2 - b}$ den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \left]-2;2\right[$ besitzt.

2 **c)** Erläutern Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto 4 - e^x$ den Wertebereich $\left]-\infty;4\right[$ besitzt.

2 **4** Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion $g: x \mapsto g(x)$. Mithilfe des Newton-Verfahrens soll ein Näherungswert für die Nullstelle a von g ermittelt werden. Begründen Sie, dass weder die x-Koordinate des Hochpunkts H noch die x-Koordinate des Tiefpunkts T als Startwert des Newton-Verfahrens gewählt werden kann.

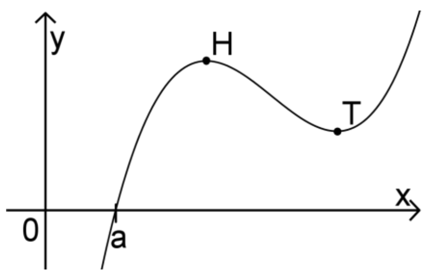


Abb. 2

(Fortsetzung nächste Seite)

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.

3 **a)** Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

2 **b)** Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2|0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3|2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h. Geben Sie eine Gleichung von h an.

20

Analysis

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(2x+3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Wertemenge W. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

2 **a)** Geben Sie D und W an.

4 **b)** Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_g im Schnittpunkt von G_g mit der x-Achse.

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.

3 **a)** Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

2 **b)** Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2|0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3|2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h. Geben Sie eine Gleichung von h an.

3 Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

2 **a)** Die Funktion g hat die maximale Definitionsmenge $]-\infty; 5]$.

3 **b)** Die Funktion k hat in $x = 2$ eine Nullstelle und in $x = -3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Der Graph von k hat die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ als Asymptote.

4 **4** Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \mapsto xe^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die erste Ableitung von f_a an der Stelle $x = 2$ den Wert 0 besitzt.

20

Stochastik

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

3 **a)** Geben Sie für die folgenden Ereignisse A und B jeweils einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt.

A: „Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen."
B: „Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen."

2 **b)** Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird.

2 Ein Moderator lädt zu seiner Talkshow drei Politiker, eine Journalistin und zwei Mitglieder einer Bürgerinitiative ein. Für die Diskussionsrunde ist eine halbkreisförmige Sitzordnung vorgesehen, bei der nach den Personen unterschieden wird und der Moderator den mittleren Platz einnimmt.

1 **a)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der möglichen Sitzordnungen berechnet werden kann, wenn keine weiteren Einschränkungen berücksichtigt werden.

4 **b)** Der Sender hat festgelegt, dass unmittelbar neben dem Moderator auf einer Seite die Journalistin und auf der anderen Seite einer der Politiker sitzen soll. Berechnen Sie unter Berücksichtigung dieser weiteren Einschränkung die Anzahl der möglichen Sitzordnungen.

10

Stochastik

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Aus dieser wird achtmal eine Kugel zufällig gezogen, die Farbe notiert und die Kugel anschließend wieder zurückgelegt.

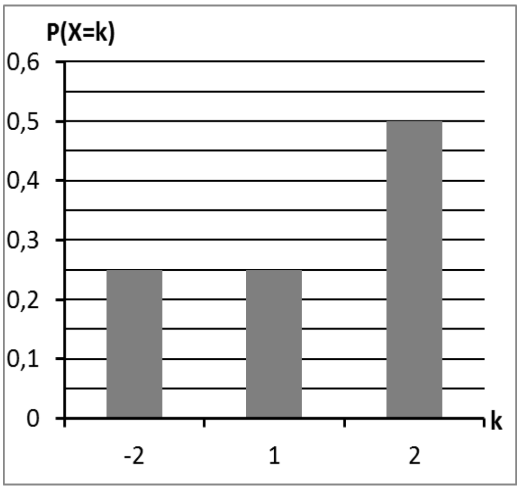
2 **a)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es werden gleich viele rote und blaue Kugeln gezogen." berechnet werden kann.

3 **b)** Beschreiben Sie im Sachzusammenhang jeweils ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den angegebenen Term berechnet werden kann.

α) $1-\left(\frac{3}{5}\right)^8$

β) $\left(\frac{3}{5}\right)^8+8\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^7$

2 Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte -2, 1 und 2 annehmen kann. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



2 **a)** Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

3 **b)** Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße X notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 1

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

3 **a)** Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

2 **b)** Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten.
Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

2 Betrachtet wird die Pyramide ABCDS mit $A(0|0|0)$, $B(4|4|2)$, $C(8|0|2)$, $D(4|-4|0)$ und $S(1|1|-4)$. Die Grundfläche ABCD ist ein Parallelogramm.

2 **a)** Weisen Sie nach, dass das Parallelogramm ABCD ein Rechteck ist.

3 **b)** Die Kante $[AS]$ steht senkrecht auf der Grundfläche ABCD. Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $24\sqrt{2}$.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide.

10

Geometrie

Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

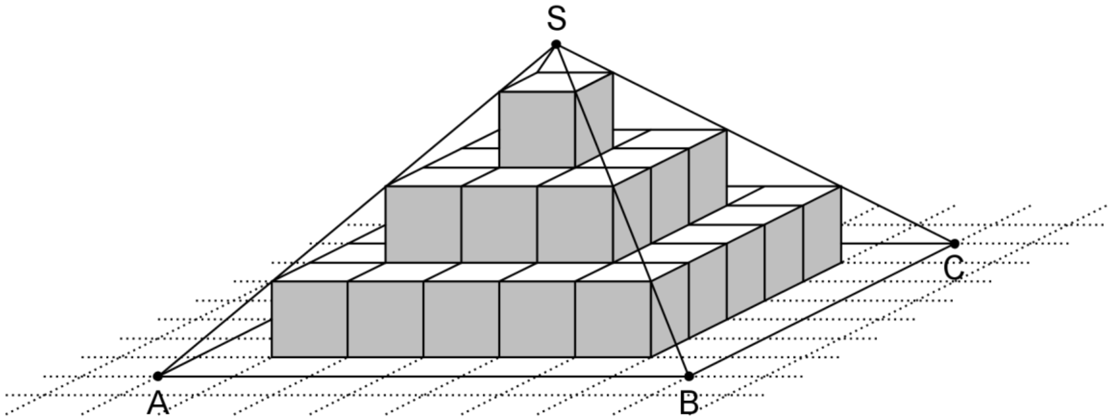
BE

1 Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

3 **a)** Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12. Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

2 **b)** Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunkts gibt es mehrere Möglichkeiten.
Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunkts an.

2 Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS mit quadratischer Grundfläche ABCD. Der Pyramide ist eine Stufenpyramide einbeschrieben, die aus Würfeln mit der Kantenlänge 1 besteht.



2 **a)** Geben Sie das Volumen der Stufenpyramide und die Höhe der Pyramide ABCDS an.

3 **b)** Bestimmen Sie unter Verwendung eines geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystems eine Gleichung für die Gerade, die durch die Punkte B und S verläuft.
Zeichnen Sie das gewählte Koordinatensystem in die Abbildung ein.

10

Mathematik

Abiturprüfung 2015

Prüfungsteil B

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

____

Name des Prüflings

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.

Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$ und Definitionsbereich $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3;-1\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

4 **a)** Zeigen Sie, dass $f(x)$ zu jedem der drei folgenden Terme äquivalent ist:

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)};\quad \frac{2}{x^2+4x+3};\quad \frac{1}{0{,}5\cdot(x+2)^2-0{,}5}$$

3 **b)** Begründen Sie, dass die x-Achse horizontale Asymptote von G_f ist, und geben Sie die Gleichungen der vertikalen Asymptoten von G_f an. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_f mit der y-Achse.

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $p: x \mapsto 0{,}5\cdot(x+2)^2-0{,}5$, die die Nullstellen $x=-3$ und $x=-1$ hat.

Für $x\in D_f$ gilt $f(x)=\frac{1}{p(x)}$.

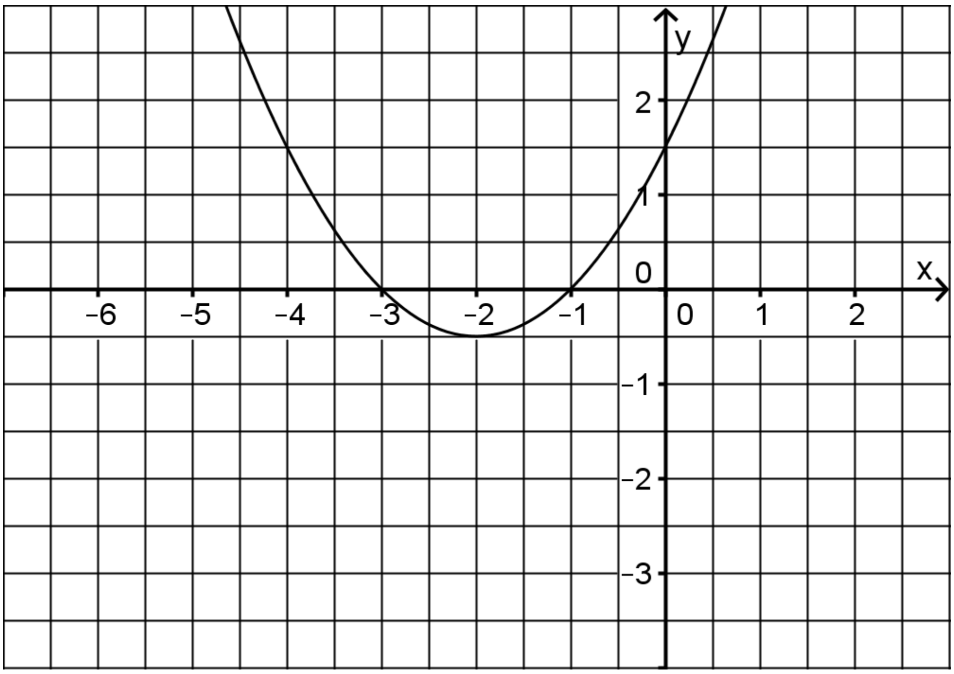


Abb. 1

5 **c)** Gemäß der Quotientenregel gilt für die Ableitungen f' und p' die Beziehung $f'(x)=-\frac{p'(x)}{(p(x))^2}$ für $x\in D_f$.

Zeigen Sie unter Verwendung dieser Beziehung und ohne Berechnung von $f'(x)$ und $p'(x)$, dass $x=-2$ einzige Nullstelle von f' ist und dass G_f in $]-3;-2[$ streng monoton steigend sowie in $]-2;-1[$ streng monoton fallend ist. Geben Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f an.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **d)** Berechnen Sie $f(-5)$ und $f(-1{,}5)$ und skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in Abbildung 1.

2 Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto \dfrac{3}{e^{x+1}-1}$ mit Definitionsbereich $D_h =]-1; +\infty[$. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_h von h.

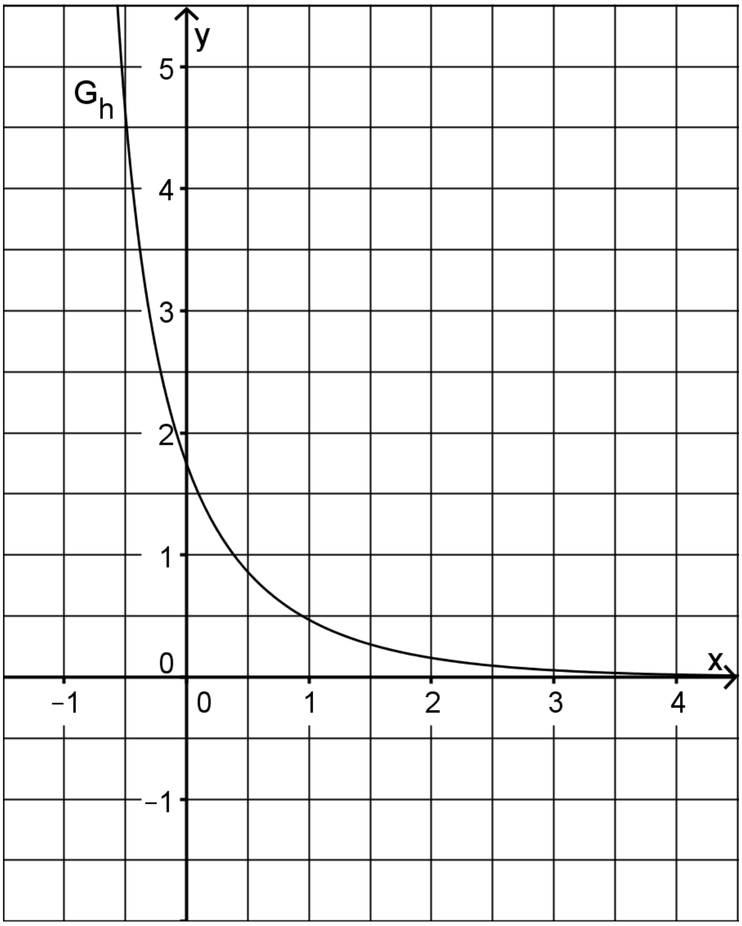


Abb. 2

4 **a)** Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ gilt.

Zeigen Sie rechnerisch für $x \in D_h$, dass für die Ableitung h' von h gilt: $h'(x) < 0$.

Gegeben ist ferner die in D_h definierte Integralfunktion $H_0 : x \mapsto \int_0^x h(t)\,dt$.

4 **b)** Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass folgende Aussagen wahr sind:

α) Der Graph von H_0 ist streng monoton steigend.

β) Der Graph von H_0 ist rechtsgekrümmt.

6 **c)** Geben Sie die Nullstelle von H_0 an und bestimmen Sie näherungsweise mithilfe von Abbildung 2 die Funktionswerte $H_0(-0{,}5)$ sowie $H_0(3)$. Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen von H_0 im Bereich $-0{,}5 \le x \le 3$.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 In einem Labor wird ein Verfahren zur Reinigung von mit Schadstoffen kontaminiertem Wasser getestet. Die Funktion h aus Aufgabe 2 beschreibt für $x \geq 0$ modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffabbaus in einer bestimmten Wassermenge. Dabei bezeichnet $h(x)$ die momentane Schadstoffabbaurate in Gramm pro Minute und x die seit Beginn des Reinigungsvorgangs vergangene Zeit in Minuten.

3 **a)** Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Zeitpunkt x, zu dem die momentane Schadstoffabbaurate auf 0,01 Gramm pro Minute zurückgegangen ist.

Die in $\mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$ definierte Funktion $k: x \mapsto 3 \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) - 0{,}2$ stellt im Bereich $-0{,}5 \leq x \leq 2$ eine gute Näherung für die Funktion h dar.

2 **b)** Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion k aus dem Graphen der Funktion f aus Aufgabe 1 hervorgeht.

5 **c)** Berechnen Sie einen Näherungswert für $\int_0^1 h(x)\,dx$, indem Sie den Zusammenhang $\int_0^1 h(x)\,dx \approx \int_0^1 k(x)\,dx$ verwenden. Geben Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.

40

Analysis

Aufgabengruppe 2

BE

1 Der Graph G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto ax^4 + bx^3$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $O(0|0)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

4 **a)** $W(1|-1)$ ist ein weiterer Wendepunkt von G_f. Bestimmen Sie mithilfe dieser Information die Werte von a und b.

(Ergebnis: $a = 1$, $b = -2$)

4 **b)** Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Die Gerade g schneidet G_f in den Punkten W und $(2|0)$.

4 **c)** Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f sowie die Gerade g in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Geraden g an.

6 **d)** G_f und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein, das durch die Gerade g in zwei Teilflächen zerlegt wird. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen.

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n: x \mapsto x^4 - 2x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_0: x \mapsto x^4 - 2$.

4 **a)** Die Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 bzw. f_4. Ordnen Sie jeder dieser Funktionen den passenden Graphen zu und begründen Sie drei Ihrer Zuordnungen durch Aussagen zur Symmetrie, zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen oder dem Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs des jeweiligen Graphen.

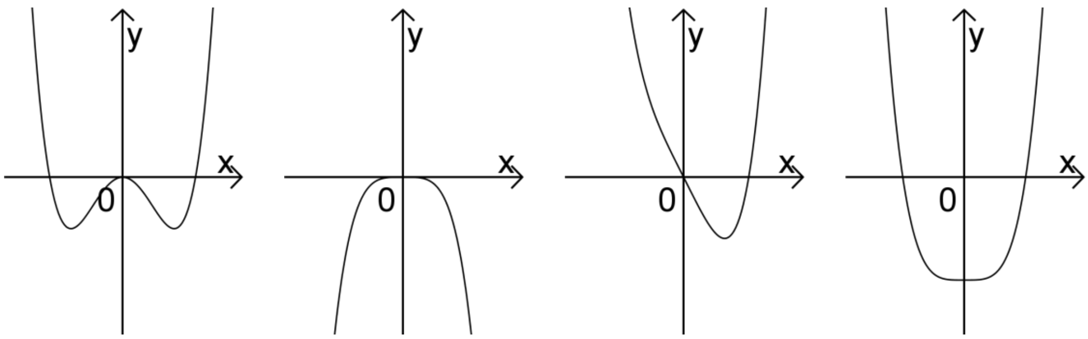


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3 Abb. 4

3 **b)** Betrachtet werden nun die Funktionen f_n mit $n > 4$. Geben Sie in Abhängigkeit von n das Verhalten dieser Funktionen für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.

(Fortsetzung nächste Seite)

3 In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle.
Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge betrachtet, d. h. insbesondere, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist. Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch die Funktion $g: t \mapsto -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde. Abbildung 5 zeigt den durch die Funktion g beschriebenen zeitlichen Verlauf der Atemstromstärke.

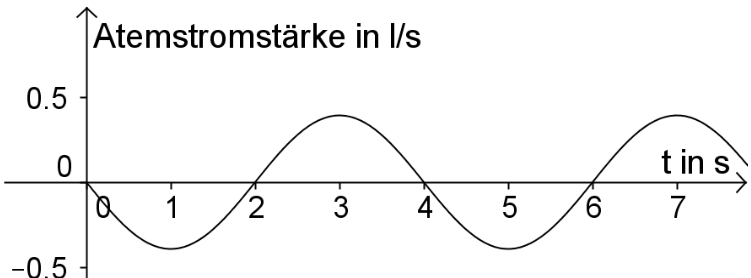


Abb. 5

2 **a)** Berechnen Sie $g(1{,}5)$ und interpretieren Sie das Vorzeichen dieses Werts im Sachzusammenhang.

2 **b)** Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Geben Sie auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist, und machen Sie Ihre Antwort mithilfe von Abbildung 5 plausibel.

4 **c)** Berechnen Sie $\int_2^4 g(t)\,dt$ und deuten Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

(Teilergebnis: Wert des Integrals: 0,5)

3 **d)** Zu Beginn eines Ausatemvorgangs befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge der Testperson. Skizzieren Sie auf der Grundlage des Modells unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Aufgabe 3c in einem Koordinatensystem für $0 \le t \le 8$ den Graphen einer Funktion, die den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge der Testperson beschreibt.

Die Testperson benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 4 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

4 **e)** Geben Sie zunächst die Atemfrequenz der Testperson an.
Die Atemstromstärke eines jüngeren Menschen, dessen Atemfrequenz um 20 % höher ist als die der bisher betrachteten Testperson, soll durch eine Sinusfunktion der Form $h: t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $t \ge 0$ und $b > 0$ beschrieben werden. Ermitteln Sie den Wert von b.

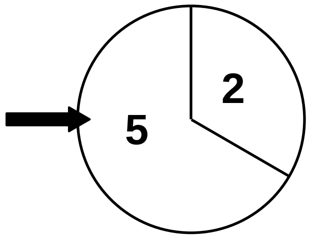
40

Stochastik

Aufgabengruppe 1

BE

1 Der Marketingchef einer Handelskette plant eine Werbeaktion, bei der ein Kunde die Höhe des Rabatts bei seinem Einkauf durch zweimaliges Drehen an einem Glücksrad selbst bestimmen kann. Das Glücksrad hat zwei Sektoren, die mit den Zahlen 5 bzw. 2 beschriftet sind (vgl. Abbildung).



Der Rabatt in Prozent errechnet sich als Produkt der beiden Zahlen, die der Kunde bei zweimaligem Drehen am Glücksrad erzielt.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Höhe dieses Rabatts in Prozent, kann also die Werte 4, 10 oder 25 annehmen. Die Zahl 5 wird beim Drehen des Glücksrads mit der Wahrscheinlichkeit p erzielt.
Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass jeder Kunde genau einen Einkauf tätigt und auch tatsächlich am Glücksrad dreht.

3 **a)** Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde bei seinem Einkauf einen Rabatt von $10\,\%$ erhält.

(Ergebnis: $2p - 2p^2$)

3 **b)** Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsgröße X gilt: $E(X) = 9p^2 + 12p + 4$.

3 **c)** Die Geschäftsführung will im Mittel für einen Einkauf einen Rabatt von $16\,\%$ gewähren. Berechnen Sie für diese Vorgabe den Wert der Wahrscheinlichkeit p.

4 **d)** Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde bei seinem Einkauf den niedrigsten Rabatt erhält, beträgt $\frac{1}{9}$. Bestimmen Sie, wie viele Kunden mindestens an dem Glücksrad drehen müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $99\,\%$ mindestens einer der Kunden den niedrigsten Rabatt erhält.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Eine der Filialen der Handelskette befindet sich in einem Einkaufszentrum, das zu Werbezwecken die Erstellung einer Smartphone-App in Auftrag geben will. Diese App soll die Kunden beim Betreten des Einkaufszentrums über aktuelle Angebote und Rabattaktionen der beteiligten Geschäfte informieren. Da dies mit Kosten verbunden ist, will der Finanzchef der Handelskette einer Beteiligung an der App nur zustimmen, wenn mindestens 15 % der Kunden der Filiale bereit sind, diese App zu nutzen. Der Marketingchef warnt jedoch davor, auf eine Beteiligung an der App zu verzichten, da dies zu einem Imageverlust führen könnte.
Um zu einer Entscheidung zu gelangen, will die Geschäftsführung der Handelskette eine der beiden folgenden Nullhypothesen auf der Basis einer Befragung von 200 Kunden auf einem Signifikanzniveau von 10 % testen:

I „Weniger als 15 % der Kunden sind bereit, die App zu nutzen."

II „Mindestens 15 % der Kunden sind bereit, die App zu nutzen."

4 **a)** Nach Abwägung der möglichen Folgen, die der Finanzchef und der Marketingchef aufgezeigt haben, wählt die Geschäftsführung für den Test die Nullhypothese II. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

3 **b)** Entscheiden Sie, ob bei der Abwägung, die zur Wahl der Nullhypothese II führte, die Befürchtung eines Imageverlusts oder die Kostenfrage als schwerwiegender erachtet wurde. Erläutern Sie Ihre Entscheidung.

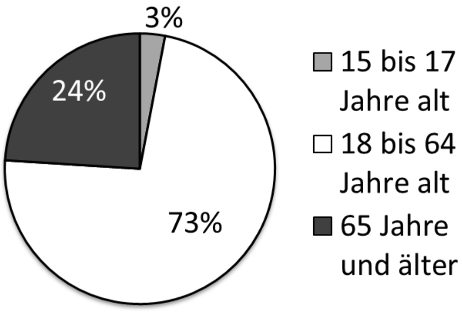
20

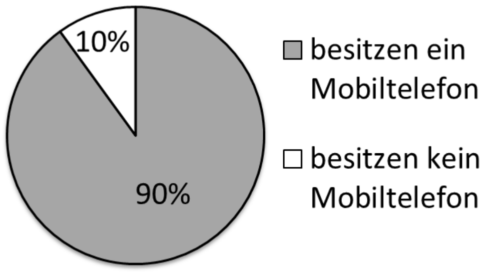
Stochastik

Aufgabengruppe 2

BE

1 Die beiden Diagramme zeigen für die Bevölkerungsgruppe der über 14-Jährigen in Deutschland Daten zur Altersstruktur und zum Besitz von Mobiltelefonen.





Aus den über 14-Jährigen in Deutschland wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

M: „Die Person besitzt ein Mobiltelefon."
S: „Die Person ist 65 Jahre oder älter."
E: „Mindestens eines der Ereignisse M und S tritt ein."

2 **a)** Geben Sie an, welche zwei der folgenden Mengen I bis VI jeweils das Ereignis E beschreiben.

I	$M \cap S$	**II**	$M \cup S$
III	$\overline{M \cup S}$	**IV**	$(M \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S) \cup (\overline{M} \cap \overline{S})$
V	$(M \cap S) \cup (M \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S)$	**VI**	$\overline{M \cap S}$

3 **b)** Entscheiden Sie anhand geeigneter Terme und auf der Grundlage der vorliegenden Daten, welche der beiden folgenden Wahrscheinlichkeiten größer ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

p_1 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person ein Mobiltelefon besitzt, wenn bekannt ist, dass sie 65 Jahre oder älter ist.

p_2 ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person 65 Jahre oder älter ist, wenn bekannt ist, dass sie ein Mobiltelefon besitzt.

5 **c)** Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachverhalt für den Fall, dass das Ereignis E mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % eintritt, eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. Bestimmen Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit $P_S(M)$.

(Fortsetzung nächste Seite)

2 Zwei Drittel der Senioren in Deutschland besitzen ein Mobiltelefon. Bei einer Talkshow zum Thema „Chancen und Risiken der digitalen Welt“ sitzen 30 Senioren im Publikum.

3 **a)** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig ausgewählten Senioren in Deutschland mindestens 17 und höchstens 23 ein Mobiltelefon besitzen.

3 **b)** Von den 30 Senioren im Publikum besitzen 24 ein Mobiltelefon. Im Verlauf der Sendung werden drei der Senioren aus dem Publikum zufällig ausgewählt und nach ihrer Meinung befragt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei dieser drei Senioren ein Mobiltelefon besitzen.

4 **3** Eine Handelskette hat noch zahlreiche Smartphones des Modells Y3 auf Lager, als der Hersteller das Nachfolgemodell Y4 auf den Markt bringt. Der Einkaufspreis für das neue Y4 beträgt 300 €, während die Handelskette für das Vorgängermodell Y3 im Einkauf nur 250 € bezahlen musste. Um die Lagerbestände noch zu verkaufen, bietet die Handelskette ab dem Verkaufsstart des Y4 die Smartphones des Typs Y3 für je 199 € an.
Aufgrund früherer Erfahrungen geht die Handelskette davon aus, dass von den verkauften Smartphones der Modelle Y3 und Y4 trotz des Preisnachlasses nur 26 % vom Typ Y3 sein werden. Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung, zu welchem Preis die Handelskette das Y4 anbieten muss, damit sie voraussichtlich pro verkauftem Smartphone der Modelle Y3 und Y4 im Mittel 97 € mehr erhält, als sie beim Einkauf dafür zahlen musste.

20

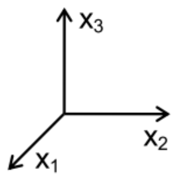
Geometrie

Aufgabengruppe 1

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: x_1 + x_3 = 2$, der Punkt $A\left(0 \mid \sqrt{2} \mid 2\right)$ und die Gerade $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

6 **a)** Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebene E im Koordinatensystem hat. Weisen Sie nach, dass die Ebene E die Gerade g enthält. Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von E mit der x_1-Achse und mit der x_3-Achse an und veranschaulichen Sie die Lage der Ebene E sowie den Verlauf der Geraden g in einem kartesischen Koordinatensystem (vgl. Abbildung).



Die x_1x_2-Ebene beschreibt modellhaft eine horizontale Fläche, auf der eine Achterbahn errichtet wurde. Ein gerader Abschnitt der Bahn beginnt im Modell im Punkt A und verläuft entlang der Geraden g. Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ beschreibt die Fahrtrichtung auf diesem Abschnitt.

3 **b)** Berechnen Sie im Modell die Größe des Winkels, unter dem dieser Abschnitt der Achterbahn gegenüber der Horizontalen ansteigt.

An den betrachteten geraden Abschnitt der Achterbahn schließt sich – in Fahrtrichtung gesehen – eine Rechtskurve an, die im Modell durch einen Viertelkreis beschrieben wird, der in der Ebene E verläuft und den Mittelpunkt $M\left(0 \mid 3\sqrt{2} \mid 2\right)$ hat.

5 **c)** Das Lot von M auf g schneidet g im Punkt B. Im Modell stellt B den Punkt der Achterbahn dar, in dem der gerade Abschnitt endet und die Kurve beginnt. Bestimmen Sie die Koordinaten von B und berechnen Sie den Kurvenradius im Modell.

(Teilergebnis: $B\left(-1 \mid 2\sqrt{2} \mid 3\right)$)

2 **d)** Das Ende der Rechtskurve wird im Koordinatensystem durch den Punkt C beschrieben. Begründen Sie, dass für den Ortsvektor des Punkts C gilt: $\vec{C} = \vec{M} + \vec{v}$.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 **e)** Ein Wagen der Achterbahn durchfährt den Abschnitt, der im Modell durch die Strecke $[AB]$ und den Viertelkreis von B nach C dargestellt wird, mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Zeit, die der Wagen dafür benötigt, auf Zehntelsekunden genau, wenn eine Längeneinheit im Koordinatensystem $10\,\text{m}$ in der Realität entspricht.

20

Geometrie

Aufgabengruppe 2

BE

Abbildung 1 zeigt eine Sonnenuhr mit einer gegenüber der Horizontalen geneigten, rechteckigen Grundplatte, auf der sich ein kreisförmiges Zifferblatt befindet. Auf der Grundplatte ist der Polstab befestigt, dessen Schatten bei Sonneneinstrahlung die Uhrzeit auf dem Zifferblatt anzeigt.

Abb. 1

Eine Sonnenuhr dieser Bauart wird in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft dargestellt (vgl. Abbildung 2). Dabei beschreibt das Rechteck ABCD mit $A(5\,|\,-4\,|\,0)$ und $B(5\,|\,4\,|\,0)$ die Grundplatte der Sonnenuhr. Der Befestigungspunkt des Polstabs auf der Grundplatte wird im Modell durch den Diagonalenschnittpunkt $M(2{,}5\,|\,0\,|\,2)$ des Rechtecks ABCD dargestellt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 cm in der Realität. Die Horizontale wird im Modell durch die x_1x_2-Ebene beschrieben.

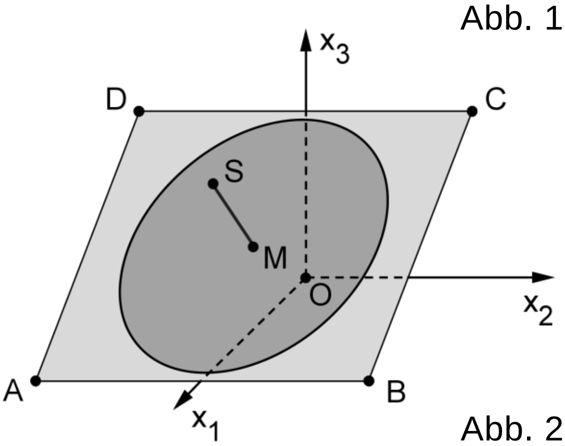


Abb. 2

5 **a)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts C. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Rechteck ABCD liegt, in Normalenform.

(mögliches Teilergebnis: $E: 4x_1 + 5x_3 - 20 = 0$)

4 **b)** Die Grundplatte ist gegenüber der Horizontalen um den Winkel α geneigt. Damit man mit der Sonnenuhr die Uhrzeit korrekt bestimmen kann, muss für den Breitengrad φ des Aufstellungsorts der Sonnenuhr $\alpha + \varphi = 90^\circ$ gelten. Bestimmen Sie, für welchen Breitengrad φ die Sonnenuhr gebaut wurde.

3 **c)** Der Polstab wird im Modell durch die Strecke $[MS]$ mit $S(4{,}5\,|\,0\,|\,4{,}5)$ dargestellt. Zeigen Sie, dass der Polstab senkrecht auf der Grundplatte steht, und berechnen Sie die Länge des Polstabs auf Zentimeter genau.

(Fortsetzung nächste Seite)

Sonnenlicht, das an einem Sommertag zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 auf die Sonnenuhr einfällt, wird im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$ dargestellt.

6 **d)** Weisen Sie nach, dass der Schatten der im Modell durch den Punkt S dargestellten Spitze des Polstabs außerhalb der rechteckigen Grundplatte liegt.

2 **e)** Um 6 Uhr verläuft der Schatten des Polstabs im Modell durch den Mittelpunkt der Kante $[BC]$, um 12 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante $[AB]$ und um 18 Uhr durch den Mittelpunkt der Kante $[AD]$. Begründen Sie, dass der betrachtete Zeitpunkt t_0 vor 12 Uhr liegt.

20