# LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2012:

# ANALYSIS I

1 a) f(x) = ln(x+3);

Definitionsbereich:

$x+3>0 \Rightarrow x>-3 \qquad D_f = ]-3;+\infty[$

Term der Ableitungsfunktion:

$$f'(x)=\frac{1}{x+3}$$

b) $g(x)=\frac{3}{x^2-1}$

Definitionsbereich:

$x^2-1=(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-1;\, x_2=+1$

Term der Ableitungsfunktion

$$g(x)=3\cdot(x^2-1)^{-1} \Rightarrow g'(x)=(-1)\cdot 3\cdot(x^2-1)^{-2}\cdot 2\text{x}=-\frac{6\text{x}}{\left(x^2-1\right)^2}$$

2 a) $f(x)=5-x^2$

b) $g(x)=|5-x|$

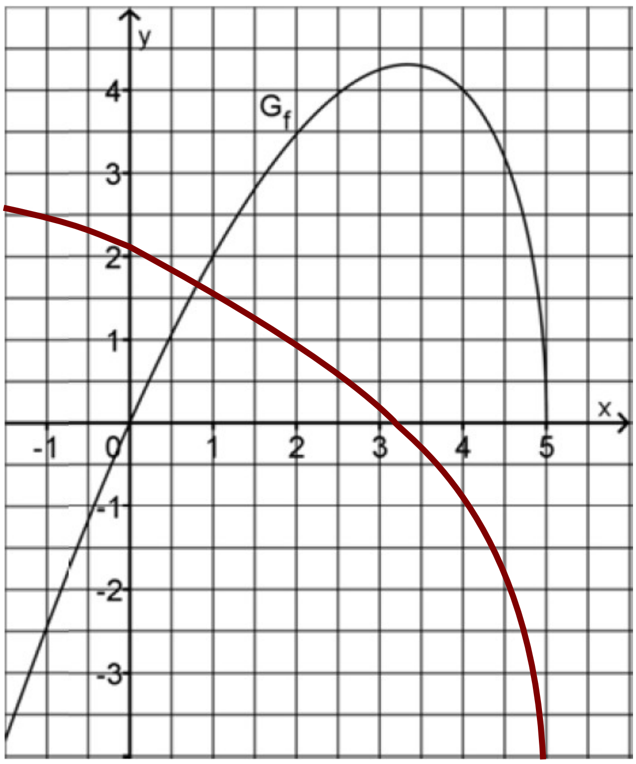
3 a) Die Funktion ist um den Faktor 2 gestaucht. Also $x_0=0;\, x_1=\frac{\pi}{2}$

b) $\int_0^2 \sin(2\text{x})\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos(2\text{x})\right]_0^2=-\frac{1}{2}\cdot(\cos(4)-\cos(0))\approx 0{,}83$

Die Werte stimmen nicht überein, da es im Intervall sowohl positiv als auch negativ orientierte Flächeninhalte gibt.

4 $f'(0)\approx 2 \qquad f'(3{,}3)\approx 0$

$\lim_{x\to 5} f'(x) \to -\infty$



1 a) f hat keine Nullstelle, da der Zähler niemals Null wird.

$$f(0)=\frac{2\cdot e^0}{e^0+9}=\frac{2}{10}=0{,}2$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{2e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x+9}_{\to 9}}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\frac{9}{\underbrace{e^x}_{\to 0}}}=2$$

c)

$$f'(x)=\frac{2e^x\cdot(e^x+9)-2e^x\cdot e^x}{(e^x+9)^2}=\frac{2e^x\cdot(e^x+9-e^x)}{(e^x+9)^2}=\frac{\overbrace{18e^x}^{>0}}{\underbrace{(e^x+9)^2}_{>0}}>0$$

d)

$$m=f'(0)=\frac{18}{100}=0{,}18$$

t ist der Wert, bei dem die Tangente die y-Achse schneidet. Nachdem sie bei x=0 angelegt wird, ist der Wert den die Funktion an dieser Stelle annimmt zugleich der Wert für t:

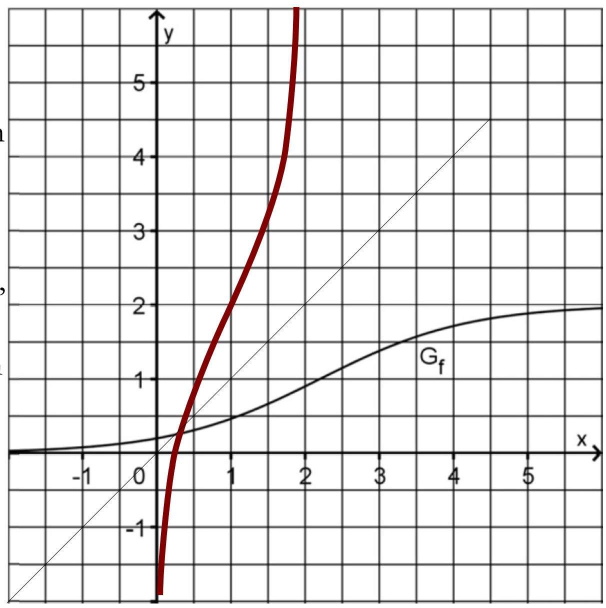
$$t=f(0)=0{,}2$$
$$T(x)=0{,}18x+0{,}2$$

e) Bei dem Funktionsterm handelt es sich um einen Bruch. Die einzige Integrationsmöglichkeit ist also die ln()-Funktion:

$$A=\int_0^4\frac{2e^x}{e^x+9}=2\int_0^4\frac{e^x}{e^x+9}=2\left[\ln(e^x+9)\right]_0^4=2\left(\ln(e^4+9)-\ln(e^0+9)\right]$$

$$A\approx 2\cdot(4{,}15-2{,}3)\approx 3{,}7$$

f) Für die Umkehrbarkeit muss die Funktion streng monoton auf dem Intervall sein, in dem sie umgekehrt werden soll. In Teilaufgabe c wurde schon nach gewiesen, dass die Ableitungsfunktion stets größer als Null ist. Nach dem Monotoniekriterium ist sie deshalb streng monoton steigend und deshalb umkehrbar.
Als Definitionsbereich ergibt sich $D_f^{-1}=]0;2[$ ,
der Wertebereich ist $W_f^{-1}=\mathbb{R}$
Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.



2 a) Um das Wachstum zu berechnen benötigt man den Höhenunterschied:

$$w = f(2) - f(0) = \frac{2e^2}{e^2+9} - 0{,}2 \approx 0{,}9 - 0{,}2 = 0{,}7$$

Die Sorte wächst also etwa 70 cm in den ersten zwei Monaten.

b) Nachdem f(x) die Höhe der Blume in Metern liefert ist also der Zeitwert gesucht, bei dem sich die Höhe von 1,5 m ergibt:

$1{,}5 = f(x) = \frac{2e^x}{e^x+9}$ muss nach x aufgelöst werden, also mit dem Nenner durchmultiplizieren:

$$1{,}5(e^x+9) = 2e^x$$

$$1{,}5e^x + 13{,}5 = 2e^x \quad | \quad -1{,}5e^x$$

$$13{,}5 = \frac{1}{2}e^x \quad | \quad \cdot 2$$

$$27 = e^x \quad | \quad \ln()$$

$$\ln(27) = x = 3\ln(3) \approx 3{,}3$$

Nach ungefähr 3,3 Monaten hat die Blume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht.

Trage die Gerade y=1,5 in das KOSY ein. Finde den Schnittpunkt mit dem Graphen. Lies den x-Wert dieses Schnittpunktes ab.

c) Die Wachstumsrate in Abhängigkeit von der Zeit entspricht der Ableitungsfunktion. Maximale Wachstumsrate bedeutet als Maximum der Ableitungsfunktion. Nachdem die Wachstumsrate anfänglich zunimmt und am Ende wieder abnimmt ist ein lokales Maximum gesucht. An dieser Stelle ist dann die zweite Ableitung 0, dort gibt es im Graphen keine Krümmung. Der dargestellte Graph hat genau einen solchen Flachpunkt, bei dem die Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung übergeht, das ist etwa bei $x_M \approx 2{,}2$
Ein Näherungswert für die Wachstumsrate ergibt sich durch Einsetzen in die Ableitungsfunktion:

$$f'(2{,}2) \approx 0{,}5$$

Die Pflanze wächst also etwa 50 cm im Monat, das sind etwa 1,7 cm pro Tag.

d) Zum Zeitpunkt der Auskeimung hat die Pflanze nahezu die Höhe Null. Also muss die Tangente bei $x = -0{,}5$ (ein halber Monat) die x-Achse schneiden:

$$T(-0{,}5) = 0{,}18 \cdot (-0{,}5) + 0{,}2 = -0{,}09 + 0{,}2 = 0{,}11$$

Laut Theorie des Biologen wäre die Pflanze zum Zeitpunkt der Auskeimung bereits 11cm lang. Das ist eine schlechte Theorie!

e) Beide Pflanzensorten haben zu Beobachtungsbeginn die gleiche Höhe.
Funktionsgleichung I bewirkt eine Verschiebung des Graphens entlang der x-Achse. Nachdem der Graph streng monoton steigt, bewirkt seine Verschiebung aber einen anderen Funktionswert bei x=0, was im Widerspruch zur obigen Aussage steht.
Funktionsgleichung III bewirkt ein Streckung des Graphen in y-Richtung. Bei x=0 wird der Funktionswert um das k-fache vergrößert, was im allgemeinen auch nicht mehr zu einem gemeinsamen „Startwert" führt.

Somit kann nur Funktionsterm II die obige Bedingung erfüllen.

f) k=2 bewirkt eine Stauchung des Graphen in x-Richtung mit Faktor 2, so dass jeder Funktionswert bereits beim halben x-Wert angenommen wird.