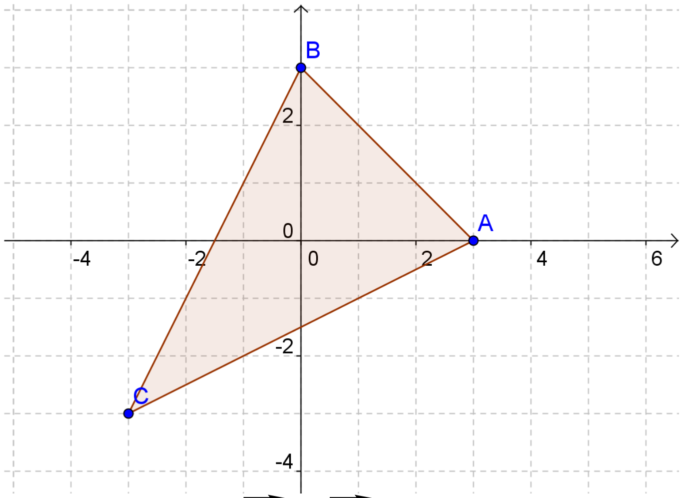
LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2011 GK

GEOMETRIE I

2011 Grundkurs Geo I

1. A(3 | 0 | 0) , B(0 | 3| 0) , C(−3| −3| 0) und S(0 | 0 | 6)

a)



Für die Gleichschenkligkeit zu zeigen: $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-3-3)^2+(-3-0)^2+0^2}=3\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-3-0)^2+(-3-3)^2+0^2}=3\sqrt{5} \quad \checkmark$$

Flächeninhalt:

Nachdem es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, lässt sich [AB] als Grundlinie verwenden und die Entfernung des Mittelpunktes von A und B zu C als die Höhe:

$$\vec{M}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})=\begin{pmatrix}1,5\\1,5\\0\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(0-3)^2+(3-0)^2+0^2}=3\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{(-3-1,5)^2+(-3-1,5)^2+0^2}=\sqrt{40,5}$$

$$A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{MC}|=\frac{1}{2}3\sqrt{2}\cdot\sqrt{40,5}=\frac{3}{2}\sqrt{81}=3\cdot 9=\frac{27}{2}=13,5$$

b)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}-3\\0\\6\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

Normalenform mit c: $2x_1+2x_2+x_3+c=0$

einsetzen von S muss Null ergeben: $2\cdot 0+2\cdot 0+6+c=0 \Rightarrow c=-6$

$$E: 2x_1+2x_2+x_3-6=0$$

c) Zur Abstandsberechnung wird die Hesse-Normalform benötigt:

$\vec{n}_0=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

HNF(E): $\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3-2=0$

C einsetzen: $\frac{2}{3}\cdot(-3)+\frac{2}{3}\cdot(-3)+\frac{1}{3}\cdot 0-2=-2-2-2=-6$

Der Punkt C ist 6 LE von E entfernt.

2 a) Nachdem S auf der x_3 -Achse liegt, wird der Punkt des Dreiecks in der x_1 - x_2 -Ebene gesucht, der vom Ursprung (also der x_3 -Achse) den größten Abstand hat.

Der Grafik ist zu entnehmen, dass dies der Punkt C ist: $d_C=\sqrt{3+3}=3\sqrt{2}>3=d_A=d_B$

$|\overrightarrow{CS}|=\sqrt{(0+3)^2+(0+3)^2+(6-0)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

b) Gesucht ist diejenige Stelle der Strecke [AC], die den kürzesten Abstand vom Ursprung hat.

Das ist zugleich der Lotfußpunkt des Ursprungs auf die Gerade AC.

Es gilt also: $\overrightarrow{XO}\circ\vec{u}=0$

$$\left[\vec{A}+\lambda\cdot(\vec{C}-\vec{A})\right]\circ\vec{u}=0$$

$$\left[\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-6\\-3\\0\end{pmatrix}\right]\circ\begin{pmatrix}-6\\-3\\0\end{pmatrix}=0$$

$$(3-6\lambda)\cdot(-6)+(-3\lambda)\cdot(-3)+0=0$$

$$-18+36\lambda+9\lambda=0$$

$$45\lambda=18\Rightarrow\lambda=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

$$\vec{F}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{5}\cdot\begin{pmatrix}-6\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}6\\-1{,}2\\0\end{pmatrix}$$

$$\cos(\phi)=\frac{\overrightarrow{FS}\circ\overrightarrow{FO}}{|\overrightarrow{FS}|\cdot|\overrightarrow{FO}|}=\frac{\begin{pmatrix}-0{,}6\\1{,}2\\6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-0{,}6\\1{,}2\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{0{,}6^2+1{,}2^2+6^2}\cdot\sqrt{0{,}6^2+1{,}2^2+0^2}}=\frac{0{,}36+1{,}44}{\sqrt{37{,}8}\cdot\sqrt{1{,}8}}\approx 0{,}22$$

$$\Rightarrow\phi\approx 77{,}4°$$

3 a) $V=\frac{1}{3}G\cdot h=\frac{1}{3}\frac{27}{2}\cdot 6=27$

b) Der Punkt C hat den Abstand 6 von der Ebene, die durch ABS hindurch geht. Aufgrund der Volumenformel muss dann das Dreieck ABS (als Grundfläche der Pyramide) ebenfalls den Flächeninhalt 13,5 besitzen.

c) Es handelt sich um einen waagerechten Schnitt der Pyramide auf halber Höhe. Deshalb sind alle Größen auf die Hälfte reduziert. Insbesondere gilt für den neuen Flächeninhalt

$$A'=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot A=3{,}375$$

d) Trage von S aus den dreifachen Normaleneinheitsvektor an um den Aufpunkt zu erhalten.

Nimm als Richtungsvektor den Vektor u aus Teilaufgabe 1b)

$$\vec{X} = \vec{S} + 3\,\vec{n}_0 + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$