LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN GK 2011:

ANALYSIS II

2011 Analysis II

1. $g(x)=\ln(4-x^2)$

a) Definitionsbereich

Die ln()-Funktion ist nur für positive Argumente definiert, also
$4-x^2>0$
$4>x^2$
Für $4=x^2$ ergibt sich $x_{1/2}=\pm 2$

Da $f(x)=x^2$ für betragsmäßig größere Argumente auch größer wird, darf das Argument betragsmäßig die 2 nicht erreichen und es muss gelten $-2<x<+2$

Symmetrieverhalten

$g(-x)=\ln\left(4-(-x)^2\right)=\ln\left(4-x^2\right)=g(x)$

Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse

Nullstellen

$\ln(1)=0 \Rightarrow 4-x^2=1 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$

Verhalten an den Rändern

$$\lim_{x\to -2^+} g(x) = \lim_{x\to -2^+} \ln(\underbrace{4-x^2}_{\to 0^+}) = -\infty$$

wegen der Achsensymmetrie gilt:

$$\lim_{x\to +2^-} g(x) = -\infty$$

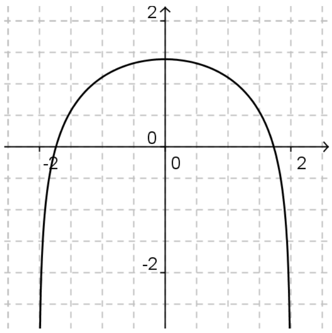
b) Monotonie

$$g'(x)=\frac{1}{4-x^2}\cdot(-2x)=\frac{-2x}{4-x^2}=\frac{2x}{x^2-4}$$

$g'(x)=0 \Rightarrow x=0$ einzige Nullstelle der Ableitungsfunktion

	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<+2$
$g'(x)$	+	0	-
G_g	➚	HOP	➘

$HOP(0|2\ln(2))$

c) 

2 $f(x) = -3x^3 + 6x^2 + 3x - 6$

a) Suche die Tangentengleichung

$f'(x) = -9x^2 + 12x + 3$

$m = f'(1) = -9 + 12 + 3 = 6$

$T(1) = 6 \cdot 1 + t = 0 \Rightarrow t = -6$

$T(x) = 6x - 6$ (Tangentengleichung)

<u>Schnitt mit der y-Achse</u>

$T(0) = -6$

<u>Dreiecksfläche</u>

$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3$

b) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{-1}^{+1} = -\frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{2} - 6 - \left(-\frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2} + 6\right) = 4 - 12 = -8$

$A_1 = 8$

$\int_{1}^{2} f(x)\,dx = -\frac{3}{4} \cdot 16 + 2 \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 4 - 6 \cdot 2 - \left(-\frac{3}{4} + 2 + \frac{3}{2} - 6\right) = -12 + 16 + 6 - 12 + \frac{3}{4} - 2 - \frac{3}{2} + 6$

$A_2 = \frac{5}{4} = 1{,}25$

c) Die Nullstelle von F(x) liegt bei x=-1, der unteren Integrationsgrenze.

Integriert man in den negativen x-Bereich, so addiert man negativ orientierte Flächeninhalte und die Funktionswerte werden immer kleiner.

Integriert man in den positiven Bereich, so nehmen die Funktionswerte bis zum Punkt P(1|-8) ab, dann nehmen sie bis zum Punkt P(2|-8+1,25) zu, um dann erneut abzunehmen, in dieser Richtung ist also auch keine Nullstelle mehr zu erwarten.

Da also die Flächenbilanz weder in positiver noch in negativer Richtung Null wird, gibt es auch keine weiteren Nullstellen.

d) $F(-1)=0 \qquad F(1)=-8 \qquad F(2)=-8+1{,}25=-6{,}75$

Hochpunkt bei $(-1|0)$

Tiefpunkt bei $(1|-8)$

Hochpunkt bei $(2|-6{,}75)$

e) Der gesamte Flächeninhalt des unterhalb der x-Achse liegenden Bereiches beträgt 8.

Der Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse im Intervall [0;1] beträgt 3.

Also gilt $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \approx -8+3=-5$

$F(0)\approx -5$

e)