LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN GK 2011:

ANALYSIS I

2011 Analysis I

1. $f(x)=(e^x-2)^2 \quad D_f=\mathbb{R}$

a) Nullstelle:

$(e^x-2)^2=0$

die linke Seite besitzt Werte größer oder gleich Null, also beiderseits die Wurzel ziehen:

$e^x-2=0$

$e^x=2$

linke und rechte Seite sind stets positiv, also beiderseits in die nat. Logarithmusfunktion einsetzen

$\ln(e^x)=\ln(2)$

$x_1=\ln(2)$ einzige Nullstelle der Funktion f(x)

Verhalten im Unendlichen

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\underbrace{e^x}_{\to 0}-2)^2=4 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\underbrace{e^x}_{\to+\infty}-2)^2=+\infty$

b) Ableitungsfunktionen

$f'(x)=2\cdot(e^x-2)\cdot e^x=2e^x\cdot(e^x-2)$ (Kettenregel)

$f''(x)=2e^x(e^x-2)+2e^x\cdot e^x=2e^x\cdot(e^x-2+e^x)=2e^x\cdot(2e^x-2)=4e^x\cdot(e^x-1)$ ✓

Extrempunkt

$f'(x)=0\Rightarrow e^x(e^x-2)=0$

der erste Faktor e^x kann nicht Null werden, also $(e^x-2)=0$

$\Rightarrow x_2=\ln(2)$ siehe Teilaufgabe a)

Die Nullstelle ist zugleich ein Punkt mit waagerechter Tangente.

Art des Extrempunktes:

$f''(\ln(2))=4e^{\ln(2)}\cdot(e^{\ln}(2)-1)=4\cdot2\cdot(2-1)=8>0$

Der Graph ist an dieser Stelle linksgekrümmt.

$E(\ln(2)|0)$ ist ein Minimum

Krümmungsverhalten

$f''(x)=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x_3=0$

	$x<0$	$x_3=0$	$0<x$
$f''(x)$	-	0	+
G_f	↻	WEP	↺

$W(0|f(0)) = W(0|4)$ ist Wendepunkt

c) $f(x) = 4$

$(e^x - 2)^2 = 4$

$e^x - 2 = \pm 2$

$e^x = 2 \pm 2$

Der Fall $e^x = 2 - 2 = 0$ ist nicht möglich, also bleibt

$e^x = 4 \Rightarrow x_4 = \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$

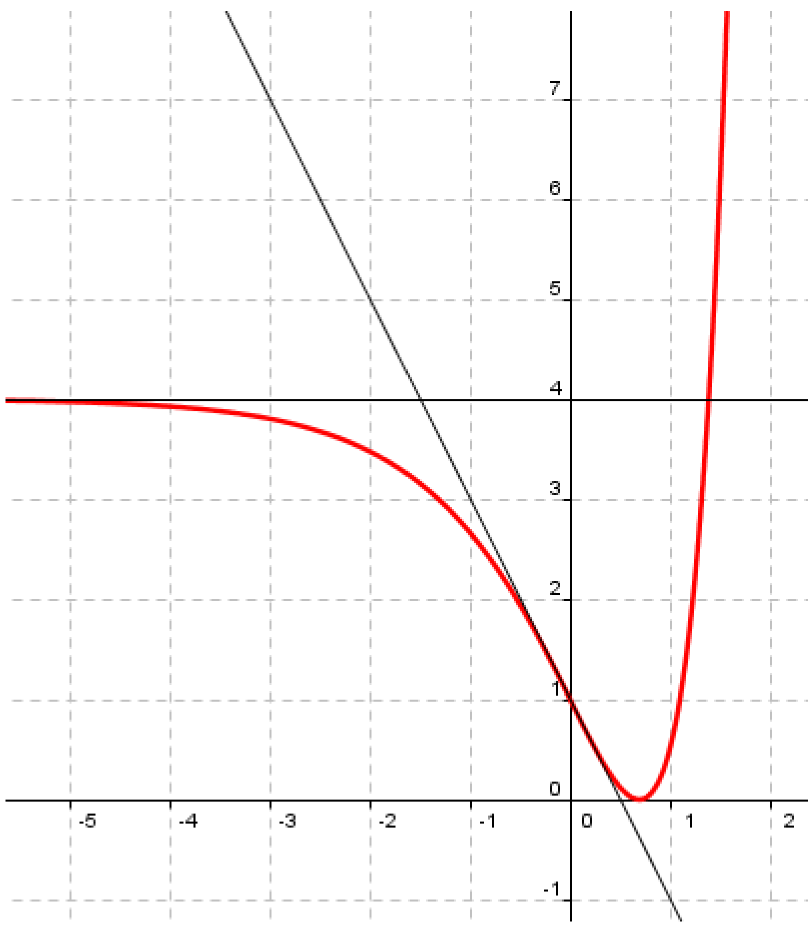
Schnittpunkt: $S(2\ln(2)|4)$

d) $W(x) = mx + t$

mit $m = f'(x_3) = f'(0) = -2$ und $t = f(0) = 4$

Wendetangente $W(x) = -2x + 4$

$f(-2) = \left(\frac{1}{e^2} - 2\right)^2 = 3{,}48$



e) α) $[-2; +\infty[$

da $f''(0) = 0$ Also $x_3 = 0$ lokale Extremstelle für $f'(x)$ und $f'(0) = -2$

β) $]-\infty; 4[$

2 a) $I(x)=\int_{\ln(2)}^{x} f(t)\,dt$

<u>Monotonieverhalten</u> (ohne Stammfunktion):

Wegen des HDI ist f(x) die Ableitungsfunktion von I(x)

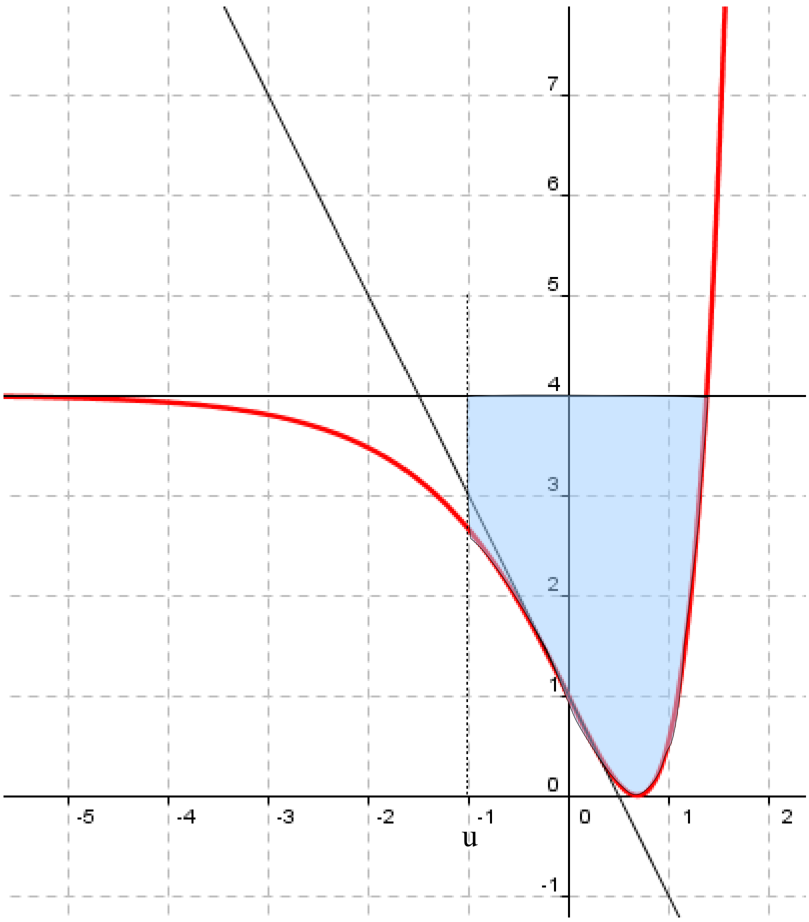
VZT	$x<\ln(2)$	$x=\ln(2)$	$x>\ln(2)$
$f(x)$	+	0	+
G_I	↗	TEP	↗

Da von $x=\ln(2)$ aus integriert wird gilt $I(\ln(2))=0 \Rightarrow TEP(\ln(2)|0)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} I(x) = -\infty$, da der Flächeninhalt bei Integration gegen die x-Richtung negativ gezählt wird und er betragsmäßig jede Grenze überschreitet.

3. a) $F'(x)=2\cdot 0{,}5\cdot e^{2x}-4e^{x}+4=\left(e^{x}\right)^{2}-4e^{x}+4=\left(e^{x}-2\right)^{2}$

b)



$A(u)=\int_{u}^{2\ln(2)} 4-f(x)\,dx=\left[4x-0{,}5e^{2x}+4e^{x}-4x\right]_{u}^{2\ln(2)}=\left[-0{,}5e^{2x}+4e^{x}\right]_{u}^{2\ln(2)}$

$A(u)=-8+4\cdot 4+0{,}5e^{2u}-4e^{u}=8+0{,}5e^{2u}-4e^{u}$

$\lim\limits_{u\to-\infty} A(u)=8+\underbrace{0{,}5e^{2u}}_{\to 0}-\underbrace{4e^{u}}_{\to 0}=8$

Das sich ins Unendliche erstreckende Flächenstück besitzt den endlichen Flächeninhalt 8.