LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2011 GEOMETRIE II

2011 Geometrie II

1. A(1|7|3), B(6|-7|1), C(-2|1|-3)

a) [AB] Hypothenuse

<u>Weg A</u>: Berechnung aller Streckenlängen im Dreieck.

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-14\\-4\end{pmatrix}$ $\qquad |\overrightarrow{AB}|=15$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-6\\-6\end{pmatrix}$ $\qquad |\overrightarrow{AC}|=9$

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-8\\8\\-4\end{pmatrix}$ $\qquad |\overrightarrow{BC}|=12$

[AC] ist die kürzere Kathete mit der Länge 9 ✓

$9^2+12^2=81+144=225 \mathit{und}\ 15^2=225$ ✓

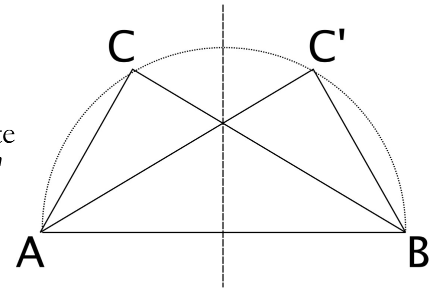
<u>Weg B</u>: Zeigen, dass die Katheten aufeinander senkrecht stehen und Berechnung der Länge.

$\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{BC}=-3\cdot(-8)+(-6)\cdot 8+(-6)\cdot(-4)=24-48+24=0$ ✓

$|\overrightarrow{AC}|=9 \qquad |\overrightarrow{BC}|=12$ ✓

b) C liegt auf dem Thaleskreis über [AB], da bei C ein rechter Winkel ist. Ein kongruentes Dreieck erhält man, wenn man C an der Symmetrieachse des Thales(halb-)kreises spiegelt.

Weitere kongruente Dreiecke erhält man, wenn man die gesamte Figur um die Achse AB rotieren lässt. Dabei erzeugen C und C' jeweils einen Kreis um AB. Jedes C auf einem dieser Kreise ergibt, zusammen mit der Strecke A und B, ein kongruentes Dreieck zu ΔABC



Der Radius der Kreise entspricht der Höhe des Dreiecks ABC über der Seite AB. Da die Länge der Grundlinie bekannt ist lässt sich die Höhe über den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks berechnen:

$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=54$ und

$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot h \Rightarrow h=2\frac{A_{\Delta ABC}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{2\cdot 54}{15}=7,2$

c) $\vec{n}\,'=\overrightarrow{AC}\,'\times\overrightarrow{BC}\,'=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\\6\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

Bestimmung von c durch Einsetzen von A:

$2\cdot 1+1\cdot 7-2\cdot 3+c=0$

$2+7-6+c=0$

$c=-3$

Normalenform der Ebene: $E:2x_1+x_2-2x_3-3=0$

$$\sin\phi=\frac{5{,}5\cdot 2+11\cdot 1+(-7)\cdot(-2)}{\sqrt{200.25}\cdot\sqrt{86}}=0{,}274 \quad \text{daraus ergibt sich} \quad \phi\approx 16\,°$$

d) $\overrightarrow{BS}=\begin{pmatrix}5{,}5\\11\\-7\end{pmatrix}$

$$\sin\phi=\frac{\overrightarrow{BS}\circ\vec{n}}{|\overrightarrow{BX}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{\begin{pmatrix}5{,}5\\11\\-7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{5{,}5^2+11^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{11+11+14}{\sqrt{200{,}25}\cdot 3}=\frac{36}{42{,}453}\approx 0{,}848$$

$\Rightarrow\phi\approx 58\,°$

Höhe der Pyramide (Abstand S von E):

E in HNF: $\frac{1}{3}(2x_1+x_2-2x_3-3)=0$

HNF(E(S)): $\frac{1}{3}(2\cdot 11{,}5+4-2\cdot(-6)-3)=12$

$V=\frac{1}{3}G\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 54\cdot 12=216$, weil G die Dreicksfläche auch die Grundfläche der Pyramide ist.

e) Die Gerade muss im Abstand 12 parallel zur Ebene E verlaufen.

f) Aus a) ist bekannt, dass C auf einem Thaleskreis über [AB] liegt. Also ist der Thaleskreis zugleich Umkreis des Dreiecks. Mittelpunkt des Umkreises ist dann der Mittelpunkt der Strecke [AB]:

$\vec{M}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})=\begin{pmatrix}3{,}5\\0\\2\end{pmatrix}$

M soll Höhenfußpunkt sein, also $\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{AB}$
(Höhe steht senkrecht auf Durchmesser der Grundfläche)

$\overrightarrow{MS}=\begin{pmatrix}8\\4\\-8\end{pmatrix}\qquad \overrightarrow{MS}\circ\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8\\4\\-8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\-14\\-2\end{pmatrix}=40-56+16=0$

Die Spitze befindet sich also senkrecht über dem Durchmesser des Umkreises, es handelt sich also um einen geraden Kegel.

$$\frac{V_K}{V_P} = \frac{\frac{1}{3} G_K \cdot h}{\frac{1}{3} G_P \cdot h} = \frac{G_K}{G_P} = \frac{\pi r^2}{54}$$

$$r = \overline{AM} = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{2{,}5^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6{,}25 + 49 + 1} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$$

$\Rightarrow G_K = 176{,}71$ das sind 327% der Dreiecksgrundfläche.

Also ist das Volumen des Kegels um 227% größer als das Volumen der Pyramide.