LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2011 GEOMETRIE I

2011 Geo II

1. A(0 | 60 | 0), B(-80 | 60 | 60), C(-80 | 0 | 60)

   a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-80\\0\\60\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}'=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\3\end{pmatrix}$

   Parameterform der Ebene:

   $E:\vec{X}=\vec{A}+\lambda\,\overrightarrow{AB}'+\mu\,\overrightarrow{AC}'$

   $E:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\60\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-4\\-3\\3\end{pmatrix}$

   $\vec{n}'=\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\0\\12\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$

   Punkt C einsetzen: $3\cdot(-80)+0\cdot0+4\cdot60+c=0$

   $-240+240+c=0\Rightarrow c=0$

   Normalenform der Ebene: $3x_1+4x_3=0$

   Da c = 0 geht E durch den Ursprung (setzt man (0|0|0) ein, dann erhält man eine wahre Aussage!) und ist parallel zur x_2-Achse, also enthält sie die x_2-Achse.

   Winkel gegenüber der x_1x_2 - Ebene:

   Normalenvektor der x_1x_2 - Ebene: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

   $\cos\psi=\frac{\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{1}}=\frac{4}{5}=0{,}8$ $\quad \Rightarrow\psi=36{,}9°$

   b) Zum Nachweis eines Rechtecks braucht man:

   vier rechte Winkel,

   jeweils gegenüberliegende, parallele Seiten und einen rechten Winkel

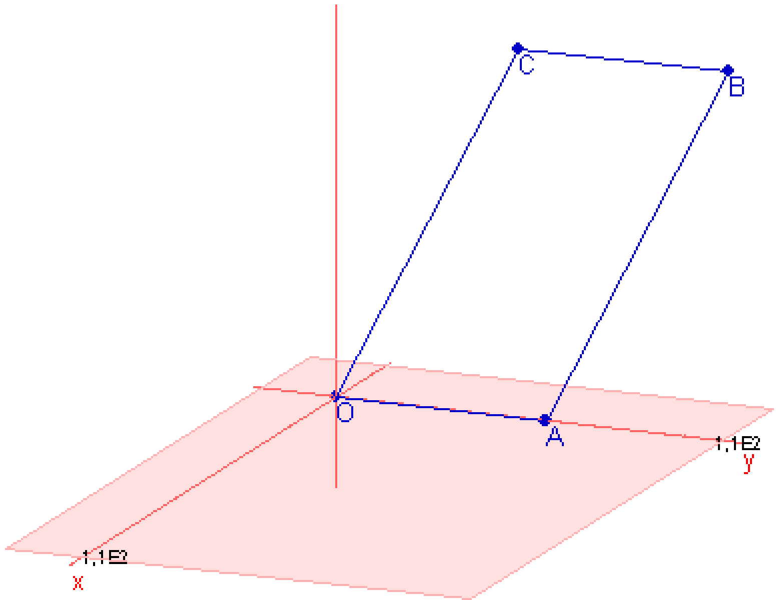
   jeweils gegenüberliegende, gleichlange Seiten und einen rechten Winkel

   $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\60\\0\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-80\\0\\60\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{OA}\circ\overrightarrow{OC}=0\Rightarrow\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OC}$ ✓

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-80\\0\\60\end{pmatrix}=\overrightarrow{OC}\quad\checkmark\quad \overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}0\\60\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}\quad\checkmark$$

also: OABC ist ein Rechteck.

$$A_R=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|=60\cdot 100=6000\quad\checkmark$$



c)

Das Grundbuchamt verwendet die Projektion der Fläche des Rechtecks auf die horizontale Ebene:

$\vec{B}'=\begin{pmatrix}-80\\60\\0\end{pmatrix}\vec{C}'=\begin{pmatrix}-80\\0\\0\end{pmatrix}$, insbesondere ergibt sich bei gleicher Breite (60m) eine Länge von 80 m und damit

$$A'=60\text{m}\cdot 80\text{m}=4800\,m^2\quad\checkmark$$

d) Der Richtungsvektor der Hubschraubergerade steht senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene:

$\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}=12+0-12=0$ und damit bewegt sich der Hubschrauber parallel zu Ebene.

Abstand zum Hang bedeutet Abstand des Aufpunktes der Hubschraubergeraden zur Ebene E:

$$HNF(E):\frac{1}{5}(3x_1+4x_3)=0$$

Aufpunkt einsetzen: $\frac{1}{5}(3\cdot(-20)+4\cdot 40)=\frac{1}{5}(-60+160)=\frac{100}{5}=20$

e) <u>Standardverfahren: Suche den Fußpunkt über</u>: $\overrightarrow{MX} \circ u = 0$

$$\left(\vec{M} - \lambda\vec{u} - \vec{A}\right) \circ \vec{u} = 0$$

$$\left(\vec{M} - \vec{A} - \lambda\vec{u}\right) \circ \vec{u} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(-20 - 4\lambda) \cdot 4 + (-10 - 5\lambda) \cdot 5 + (-10 + 3\lambda) \cdot (-3) = 0$$

$$-80 - 16\lambda - 50 - 25\lambda + 30 - 9\lambda = 0$$

$$-100 - 50\lambda = 0$$

$$\lambda = -2$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -28 \\ 30 \\ 46 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} - \vec{M} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{MF}| = \sqrt{144 + 256} = 20 \quad \checkmark$$

<u>Kürzerer Weg:</u> 20 von M aus in Normalenrichtung muss senkrecht auf die Gerade treffen:

Normalenvektor der Länge 20: $\overrightarrow{n_{20}} = \vec{n_0} \cdot 20 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 20 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_{20}} \circ \vec{u} = 12 \cdot 4 + 0 \cdot 5 - 3 \cdot 16 = 48 - 48 = 0$ steht senkrecht auf der Geraden ✓

$\vec{M} + \overrightarrow{n_{20}} = \begin{pmatrix} -28 \\ 30 \\ 46 \end{pmatrix}$ ist Element der Geraden für $\lambda = -2$ ✓

f) Der Hang ist nur in x_1-Richtung geneigt, d.h. der **östliche** Verankerungspunkt hat die gleiche x_1 und x_3 – Komponente, nur x_2 wird um 15 in Ostrichtung, also aufsteigender x_2-Richtung verändert:

$$V_O(-40|30+15|30) = V_O(-40|45|30)$$

Für den **nördlichen** Verankerungspunkt muss man von M aus 15 in Richtung $\overrightarrow{OC}$ gehen:

$$\vec{V}_N = \vec{M} + \frac{15}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + \frac{15}{100} \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = \vec{M} + \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix}$$