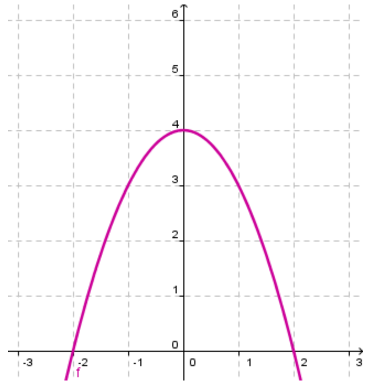
LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2011:

ANALYSIS II

2011 Analysis II/ Teil 1

1



$$4-x^2=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 2$$

$$\int_{-2}^{+2} 4-x^2\,dx=\left[4\text{x}-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{+2}=8-\frac{8}{3}-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=16-\frac{16}{3}=\frac{2}{3}\cdot 16=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}$$

2 Maximale Definitionsmenge: Der Radikand darf nicht negativ sein. $D_f=\mathbb{R}_0^+$

$$f(x)=3\cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x)=\frac{3\cdot 2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+C=2\cdot x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$F(1)=4 \Rightarrow 4=2\cdot 1^{\frac{3}{2}}+C \Rightarrow C=2$$

also $F(x)=2\cdot x^{\frac{3}{2}}+2$

3 a) Nullstellen sind dort, wo der Zähler Null wird und die Funktion definiert ist:

$$\sin(x)=0 \Rightarrow x=k\cdot\pi\,;\, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

b) $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{(-x)^2}=\dfrac{-\sin(x)}{x^2}=-f(x)$ (Punktsymmetrie zum Ursprung des KoSy)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, da die Sinusfunktion maximal den Betrag 1 erreicht, der Nenner jedoch beliebig groß wird.

c) $$f'(x)=\frac{\cos(x)\cdot x^2-\sin(x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{x\cos(x)-2\sin(x)}{x^3}$$

4 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel: $(x+1)^2$ im Nenner

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+2$$

2011 Analysis II/Teil 2

1 a) $f'(x)=-3e^{-0,5x}+1$

$f'(x)=0 \Rightarrow 1=3e^{-0,5x}$ oder

$e^{-0,5x}=\frac{1}{3} \quad |\ \ln()$

$-0,5x=-\ln(3)$

$x=2\ln(3)$

VZT	$x<2\ln(3)$	$x=2\ln(3)$	$x>2\ln(3)$
$f'(x)$	-	0	+
G_f	\	TIP	/

$f''(x)=1,5\cdot e^{-0,5x}>0$ (immer linksgekrümmt)

$f(2\ln(3))=6\cdot e^{-0,52\ln(3)}+2\ln(3)=2+2\ln(3)$

$\mathrm{TIP}(2\ln(3)|2+2\ln(3))$

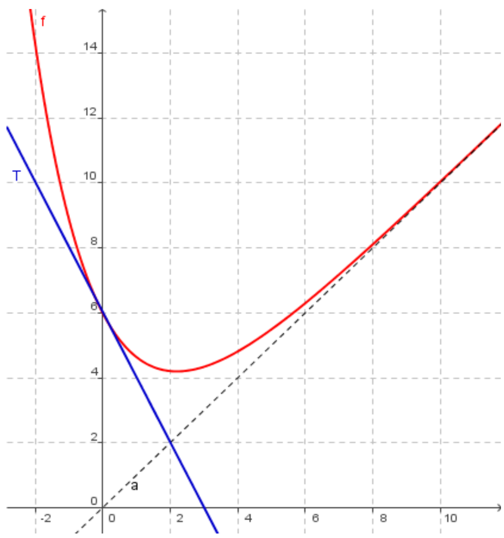
b) Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-0,5x}}_{+\infty}+\underbrace{x}_{-\infty}\to\infty$$

Da der exponentielle Term schneller gegen $+\infty$ strebt als die Potenzfunktion $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{-0,5x}}_{\to 0}+x=x$$

c) Tangente bei x = 0: $T(x)=mx+t$



- t ist bekannt, da es bei x=0 genau dem Funktionswert entspricht:
  $f(0)=6\cdot e^{-0,5\cdot 0}+0=6$

  $t=6$
- m entspricht dem Wert der Ableitung an der Stelle $x=0$:
  $f'(0)=-3\cdot e^{-0,5\cdot 0}+1=-2$

  $m=-2$
- $T(x)=-2x+6$

2 a)
- $e^{0,5x}$: Streckung in x-Richtung mit Faktor 2
- $e^{-0,5x}$ Spiegelung an der y-Achse
- $6e^{-0,5x}$ Streckung in y-Richtung mit Faktor 6
- $6e^{-0,5x}+1,5$ Verschiebung um 1,5 in positive y-Richtung

b) Der Schadstoffausstoß startet mit seinem höchsten Wert und sinkt dann immer weiter ab, um sich letztlich beliebig nahe an 1,5 mg/l anzunähern.

c) $S=\int_0^5 h(x)\,dx=\int_0^5 6e^{-0,5x}+1,5\,dx=\left[-12e^{-0,5x}+1,5x\right]_0^5$

$$S=-12e^{-0,5\cdot 5}+1,5\cdot 5-\left(-12e^{-0,5\cdot 0}+1,5\cdot 0\right)\approx -1+7,5+12=18,5$$

In den ersten fünf Minuten hat die Maschine ungefähr 18,5 mg Schadstoffe ausgestoßen.

3 a) Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_a(0)=6\cdot e^0-a\cdot 0=6$$

Alle Funktionen schneiden die y-Achse in $S_y(0|6)$.

Monotonieverhalten:

$f_a'(x)=\underbrace{-3\cdot e^{-0,5x}}_{<0}+\underbrace{(-a)}_{<0}$ Da zwei negative Zahlen addiert werden ist das Ergebnis negativ.

Der Graph ist also im gesamten Definitionsbereich monoton fallend.

Grenzwert im positiv Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{6e^{-0,5x}}_{\to 0}+\underbrace{-a\cdot x}_{\to -\infty}=-\infty$$

b) Newton-Verfahren:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f_a(x)}{f_a'(x)}$$

$$x_1=0-\frac{f_a(0)}{f_a'(0)}=-\frac{6}{-3-a}=\frac{6}{3+a}$$