LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2011:

ANALYSIS I

2011 Analysis I/ Teil 1

1. $f(x)=\frac{2x+3}{4x+5}$

   Maximaler Definitionsbereich:

   $4x+5=0\Rightarrow 4x=-5\Rightarrow x=-\frac{5}{4}=-1{,}25$

   $D=\mathbb{R}\setminus\{-1{,}25\}$

   $f'(x)=\frac{2\cdot(4x+5)-(2x+3)\cdot 4}{(4x+5)^2}=\frac{8x+10-8x-12}{(4x+5)^2}=-\frac{2}{(4x+5)^2}$

2. Wegen des HDI gilt: $F'(x)=f(x)$

   $F(x)=\frac{1}{4}x^2\cdot(2\ln x-1)$

   $F'(x)=\frac{x}{2}\cdot(2\ln x-1)+\frac{x^2}{4}\cdot\frac{2}{x}=x\ln x-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x\ln x$ ✓

   $F(1)=\frac{1}{4}\cdot(0-1)=-\frac{1}{4}\Rightarrow F_g(x)=\frac{1}{4}x^2\cdot(2\ln x-1)+\frac{1}{4}$

3. $N(2000)=6{,}1\cdot 10^9\Rightarrow N_0\cdot e^{k\cdot 0}=N_0\cdot 1=6{,}1\cdot 10^9$

   $N_0=6{,}1\cdot 10^9$

   $N(2010)=6{,}9\cdot 10^9=6{,}1\cdot 10^9\cdot e^{k\cdot 10}\Rightarrow e^{10k}=\frac{6{,}9\cdot 10^9}{6{,}1\cdot 10^9}=\frac{6{,}9}{6{,}1}\approx 1{,}131$

   $\Rightarrow 10k=\ln(1{,}131)$ oder $k=\frac{\ln(1{,}131)}{10}\approx 0{,}0123$

4. a) $\sin(2x)$ hat die doppelte Frequenz von $\sin(x)$.

   Deshalb liegt eine komplette Periode zwischen 0 und π . Da diese Funktion punktsymmetrisch zu $x=\frac{\pi}{2}$ ist, gleichen sich alle Flächenanteile aus.

   b) $\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{2}\cdot\cos(\pi)-\frac{1}{2}\cdot\cos(0)=+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

Teil 2

1 a) Da der Radikand positiv sein muss, gilt $x+3\geq 0\Rightarrow x\geq -3$.

   Es handelt sich um eine lineare Transformation, die sich am Graph durch eine Verschiebung um drei nach links darstellt.

   b) Abstände berechnen sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

   $d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

   $\Delta x=x-1{,}5$

   $\Delta y=y-0=f(x)-0=\sqrt{x+3}$

   $d(x)=\sqrt{(x-1{,}5)^2+x+3}=\sqrt{x^2-3x+2{,}25+x+3}=\sqrt{x^2-2x+5{,}25}$

c) $d(x)=\sqrt{x^2-2x+5{,}25}\geq 0$

$$d'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+5{,}25}}\cdot(2x-2) \qquad d'(x)=0\Rightarrow 2x_E-2=0\Rightarrow x_E=1$$

$d'(x)$ wechselt sein Vorzeichen beim Durchgang durch die Nullstelle von – nach +, also handelt es sich um ein Minimum.

Punkt auf dem Graphen: $Q_E(1|2)$

d) Steigung der Geraden $Q_E P$: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{0{,}5}=-4$

Steigung der Tangente: $f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1+3}}\cdot 1=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$

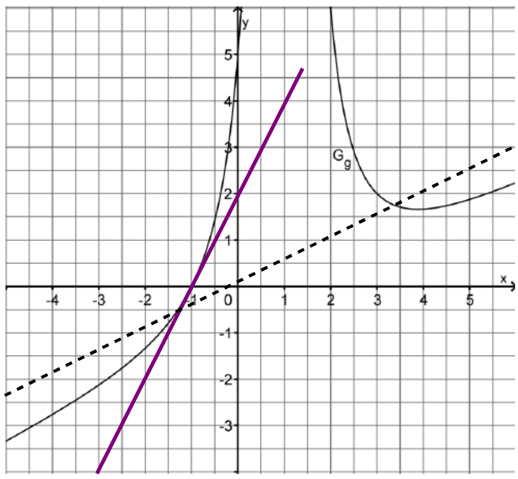
$m\cdot f'(1)=-1\Rightarrow$ Geraden sind orthogonal.

e) $$A=\int_{-3}^{1} f(x)\,dx+\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 2=[F(x)]_{-3}^{1}+0{,}5=\left[\frac{2}{3}\cdot(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{1}+0{,}5=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right)+0{,}5=\frac{16}{3}+\frac{1}{2}$$

$$A=\frac{35}{6}$$

2 a) Anlegen einer Tangente ergibt $g'(-1)\approx 2$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g'(x)=\frac{1}{2}$$



b) I fällt aus, da sich als Asymptote $a(x)=x-1$ ergibt.
II entfällt, da der Pol einen Vorzeichenwechsel hat
(ungerade Potenz im Nenner)
III Untersuchung für $f(-1)=0$:

$$g(-1)=0=\frac{1}{2}\cdot(-1)-1+\frac{a}{(-1-1)^2}=\frac{a}{4}-1{,}5$$

$$\frac{a}{4}-1{,}5=0\Rightarrow\frac{a}{4}=1{,}5\Rightarrow a=6$$

c) $h(x)$ ist nur definiert, wenn $g(x)>0$ $\Rightarrow D_h=]-1;+\infty[\setminus\{1\}$

$$\lim_{x\to -1} h(x)\to-\infty \qquad \lim_{x\to\infty} h(x)\to+\infty \qquad \lim_{x\to 1} h(x)\to+\infty$$

$$h(x)=0\Rightarrow g(x)=1$$

$$g(x)=\frac{1}{2}x-1+\frac{6}{(x-1)^2}=1$$

$$i(x)=\frac{1}{2}x-2+\frac{6}{(x-1)^2}=0$$

$$i(-0{,}6)=0{,}04$$

oder mit dem Newtonverfahren: i'(x) = $\frac{1}{2}-\frac{6}{(x-1)^3}$ Startwert $x_0=-0{,}5$:

$$x_1=x_0-\frac{i(x_0)}{i'(x_0)}=-0{,}5-\frac{0{,}42}{4{,}06}=-0{,}6 \quad \text{also:} \quad x\approx-0{,}6$$

$$x_2 = -0,6 - \frac{0,04}{3,43} = -0,61$$