LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2010:

GEOMETRIE II

2010 Geometrie II

1.

$A(7|5|1);\ B(2|-5|6) \qquad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R}$

a) Setze den Punkt mit der Parameterform der Gerade gleich und betrachte nur die dritte Komponente:

$6 = 1 + 0 \cdot \lambda$ es gibt kein λ welches diese Gleichung erfüllen kann. Also liegt B nicht auf g.

b) Der Normalenvektor der Ebene berechnet sich aus dem Kreuzprodukt des Richtungsvektors der Geraden g und eines Verbindungsvektors $\vec{v}$ von A nach B:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also $E: 2x_1 - x_2 + c = 0$

Zur Bestimmung von c einfach z.B. A einsetzen:

$14 - 5 + c = 0 \Rightarrow c = -9$ ergibt

$E: 2x_1 - x_2 - 9 = 0$ ✓

E liegt parallel zur x_3 Achse.

c) Für den Fußpunkt C muss gelten, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{BC}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden steht:

$$\overrightarrow{BC} \circ \vec{u} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(5+\lambda) \cdot 1 + (10 + 2\lambda) \cdot 2 + 0 = 0$$

$$5 + \lambda + 20 + 4\lambda = 0$$

$$25 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -5 \qquad \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ✓$$

Volumen des Prismas:

$$V = \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \right) \cdot \overline{AA'}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2 + 0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

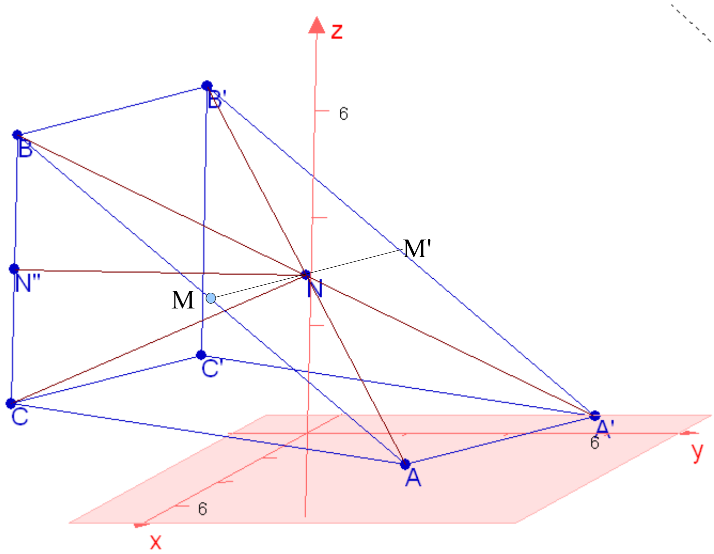
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} = 5$$

$$|\overrightarrow{AA'}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{5} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5} = 5^3 = 125$$

d) ΔABC Hat bei C einen rechten Winkel (siehe Teilaufgabe C). Dann liegt C aber auch auf dem Thaleskreis über AB. Dieser hat seinen Mittelpunkt bei $\vec{M} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$ und ist somit ein (Halb-)Großkreis auf der Kugel K.

2. a) $\vec{A}\,' = \vec{A} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓



b) Die Grundfläche ABC liegt in der Ebene E, wenn der Normalenvektor also linear abhängig zu $\overrightarrow{AA'}$ ist, dann steht $\overrightarrow{AA'}$ senkrecht auf der Grundfläche ABC.

$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -2$ Also $\vec{v}$ linear abhängig $\vec{n}$ und somit $\overrightarrow{AA'}$ senkrecht Dreieck ABC.

c) N ist also Diagonalenschnittpunkt von allen Eckpunkten des Rechtecks gleichweit entfernt. Zu zeigen ist also nur noch, dass $\overline{NC} = \overline{NB}$, denn durch die Verschiebung gilt dann auch dass $\overline{NC'} = \overline{NB'}$.

Wenn man zeigt, dass das ΔBCN gleichschenklig mit Basis [BC] ist, dann muss auch gelten, dass $\overline{NC} = \overline{NB}$. Als Hilfspunkt wird N'' verwendet, der Mittelpunkt von [BC].

$$\overrightarrow{N''} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \qquad \vec{N} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A'} + \vec{B}) = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$$

Wenn [N'' N] orthogonal zu [BC], dann ist ΔBCN gleichschenklig und $\overline{NC} = \overline{NB}$.

$$\overrightarrow{N''N} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{N''N} \circ \overrightarrow{AB} = 0 \ ✓$$

d) Betrachte das Dreieck ABC. M ist die Mitte der Hypothenuse. Also besitzen die Teildreiecke ΔMCA und ΔCMB den gleichen Flächeninhalt. (Grundlinie und Höhe identisch). Entsprechend wird das Prisma mit Hilfe der Ebene die durch C, M und M' geht in zwei volumengleiche Teile zerlegt.