LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 2010 ANALYSIS II

2010 II

1. a) $f(x)=\frac{1-x}{1+x} \qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Ränder des Definitionsbereiches: $-\infty\,;-1\,;+\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-1$$

$$\lim_{x\to -1^{-0}} \to -\infty \qquad \lim_{x\to -1^{+0}} \to +\infty$$

Waagerechte Asymptote: $y=-1$ Senkrechte Asymptote: $x=-1$

b) $g(x)=\frac{1-x}{1+x^2}$ (Nenner kann nicht Null werden)

$h(x)=\frac{1-x}{(1+x)^2}$ (-1 ist Nullstelle des Nenners, alle Abweichungen davon sind positiv)

2 a) Achsenschnittpunkte

y-Achse: $f(0)=1$ $S_y(0|1)$

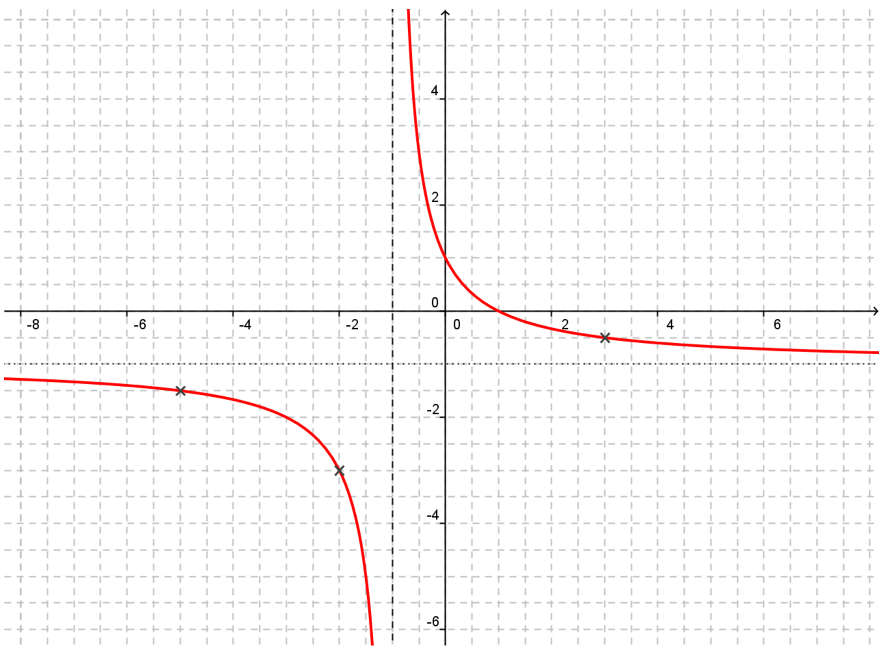
x-Achse: $0=1-x \Rightarrow x=1$ $S_x(1|0)$

Monotonieverhalten

$$f'(x)=\frac{(-1)\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1+x)^2}<0$$

Der Graph ist streng monoton fallend

b) $f(3)=-\frac{1}{2};\ f(-2)=-3;\ f(-5)=-1{,}5;$



3. $y=\frac{1-x}{1+x}$ nach x auflösen

$$(1+x)y=1-x$$
$$y+xy=1-x$$
$$x+xy=1-y$$
$$x(1+y)=1-y$$
$$x=\frac{1-y}{1+y}$$

x und y vertauschen

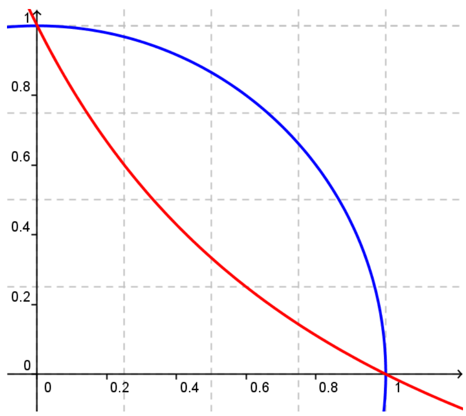
$f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}=f(x)$; G_f ist also symmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. Quadranten

4 a) $F(x)=-x+2\ln(x+1) \quad x\in]-1;+\infty[$

Bestätigung durch Ableitung:

$$F'(x)=-1+\frac{2}{x+1}\cdot 1$$
$$F'(x)=\frac{-(x+1)}{x+1}+\frac{2}{x+1}=\frac{-x-1+2}{x+1}=\frac{1-x}{1+x} \quad ✓$$

b) Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraphen A_1 . Anschließend kann man diesen Inhalt zum Inhalt des Viertelkreises ins Verhältnis setzen und sollte dann etwa das Verhältnis 1:2 erhalten.



$$A_1=\int_0^1 f(x)\,dx=F(1)-F(0)$$
$$=-1+2\ln(2)-(-1+2\ln(1))=-1+2\ln(2)+1-0$$
$$=2\ln(2)=0{,}39$$

$$A_{Viertelkreis}=\frac{\pi 1^2}{4}=\frac{\pi}{4}=0{,}79$$
$$\frac{A_{Viertelkreis}}{A_1}\approx 2{,}03 \quad ✓$$

5 a) $f(0{,}6)=\frac{1-0{,}6}{1+0{,}6}=0{,}25$

$m\to 0$: $v\to 1\frac{m}{s}$ es ist nichts mehr „im Weg“

$m\to\infty$: $v\to -1\frac{m}{s}$ (siehe 1a) die Kugel stößt gegen eine Wand und prallt zurück.

b) Rechtsbewegung: v>0, also $f(x)>0$, dann $x\in]-1;+1[$

es gibt aber keine negativen Massen. Also: Rechtsbewegung für Massen kleiner als 1kg

$v=-0{,}9\frac{m}{s}$ also $y=-0{,}9$ und x ist gesucht.

Also -0,9 in die Umkehrfunktion einsetzen (haha!):

$$\frac{1-(-0{,}9)}{1-0{,}9}=\frac{1{,}9}{0{,}1}=19$$

Kugel B muss eine Masse von 19kg besitzen.

Probe: $f(19)=-0{,}9$ ✓