LÖSUNG

ABITUR-

AUFGABEN 2010

ANALYSIS I

2010 I

1. $f_k(x) = 1 - \frac{2k}{e^x + k}$ $\quad k \in \mathbb{R}^+$

a) Der Nenner darf nicht Null werden. Da aber $e^x > 0$ und $k > 0$ kann er nicht 0 werden.

Deshalb gilt $D_{fk} = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{2k}{\underbrace{e^x}_{\to 0} + k} = 1 - 2 = -1 \qquad \lim\limits_{x \to \infty} 1 - \frac{2k}{\underbrace{e^x}_{\to \infty} + k} = 1$

Waagerechte Asymptoten: $y = -1$ und $y = 1$

Keine senkrechten Asymptoten.

b) Fürs Ableiten empfiehlt es sich den Funktionsterm in Potenzschreibweise umzuschreiben:

$f_k(x) = 1 - 2k \cdot (e^x + k)^{-1}$

$f_k'(x) = -2k(-1) \cdot (e^x + k)^{-2} \cdot e^x = \frac{2k e^x}{(e^x + k)^2}$ ✓

Monotonieverhalten:

$f_k'(x) > 0$, da $k > 0 \wedge e^x > 0 \wedge (e^x + k)^2 > 0$

also ist der Graph streng monoton steigend auf dem gesamten Definitionsbereich.

c) $f(x) = 0 \Rightarrow 1 = \frac{2k}{e^x + k} \Rightarrow 2k = e^x + k \Rightarrow e^x = k$

$e^x = k \Rightarrow x = \ln(k)$ muss einzige Nullstelle bleiben, da es keine Polstelle gibt und f_k auf dem gesamten Definitionsbereich streng mononton steigend ist.

$f_k'(\ln(k)) = \frac{2k \cdot k}{(k + k)^2} = \frac{2k^2}{k^2} = 2 = konst$

Alle Tangenten t_k an den Nullstellen haben die Steigung 2, sind also parallel.

d) $f_1(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1} \qquad f_8(x) = 1 - \frac{16}{e^x + 8}$

$f_1(x) = f_8(x)$ (Suche Schnittpunkte)

$\frac{2}{e^x + 1} = \frac{16}{e^x + 8}$ über kreuz multiplizieren und durch 4 teilen:

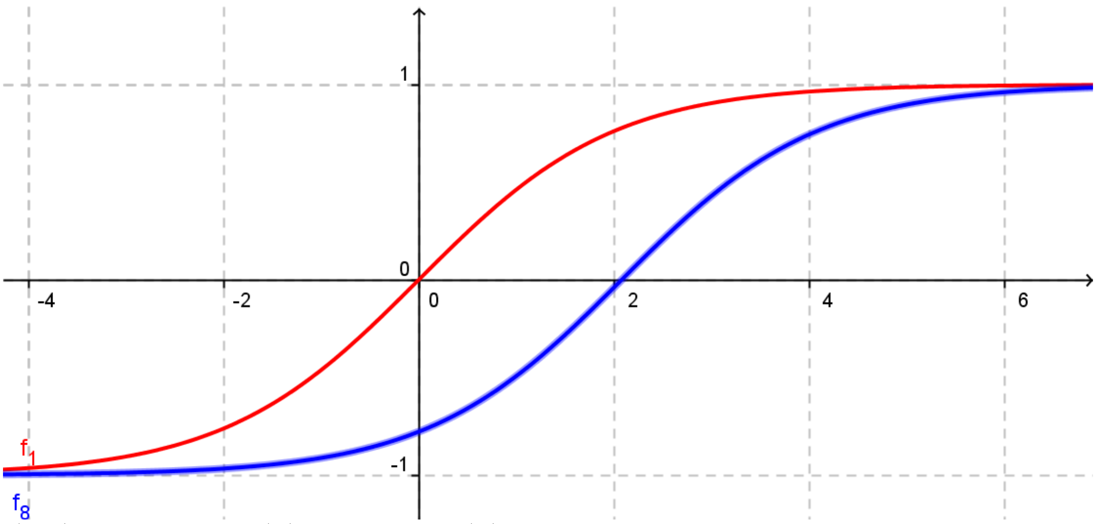
$e^x + 8 = 8 \cdot (e^x + 1)$

$e^x + 8 = 8e^x + 8$

$e^x = 8e^x$

$0 = 7e^x$ Diese Gleichung hat keine Lösung, also schneiden sich auch f_1 und f_8 nicht.

e)



$f_1(-1)=-0{,}46 \quad f_1(1)=0{,}46 \quad f_8(1)=-0{,}49$ f_8(3)=0,43

f) Betrachte die Nullstelle $x=\ln(k)$ sie lässt sich umformen zu

$k=e^x$, d.h. Zu jedem x gibt es in k dessen Nullstelle bei x durch die x-Achse geht.

g) $F_k(x)=2\ln(e^x+k)-x$

$$F_k{}'(x)=\frac{2}{e^x+k}\cdot e^x-1=\frac{2e^x}{e^x+k}-\frac{e^x+k}{e^x+k}=\frac{e^x-k}{e^x+k}=\frac{e^x+k-2k}{e^x+k}=1-\frac{2k}{e^x+k} \quad ✓$$

h) $$\int_0^{\ln(8)} f_8(x)\,dx=\left[2\ln(e^x+8)-x\right]_0^2=2\ln(e^{\ln(8)}+8)-\ln(8)-\left(2\ln(e^0+8)-0\right)$$

$$\int_0^{\ln(8)} f_8(x)\,dx=2\ln(16)-\ln(8)-2\ln(9)=8\ln(2)-3\ln(2)-4\ln(3)=5\ln(2)-4\ln(3)<0$$

$A=4\ln(3)-5\ln(2)\approx 0{,}93$

2. Der Graph besitzt keine Nullstellen mehr, da $\ln(-k)$ nicht definiert.

   $f_k{}'(x)<0$ für z.B. $k=-2$ und $x=0$ Jedenfalls nicht mehr streng monoton steigend!