Abiturprüfung 2007

MATHEMATIK

als Grundkursfach

Arbeitszeit: 180 Minuten

Der Fachausschuss wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten
GM1, GM2 und GM3 zur Bearbeitung aus.

Falls das Thema GM1.I gewählt wird, ist die Angabe vom Prüfling mit dem Namen zu versehen und mit abzugeben.

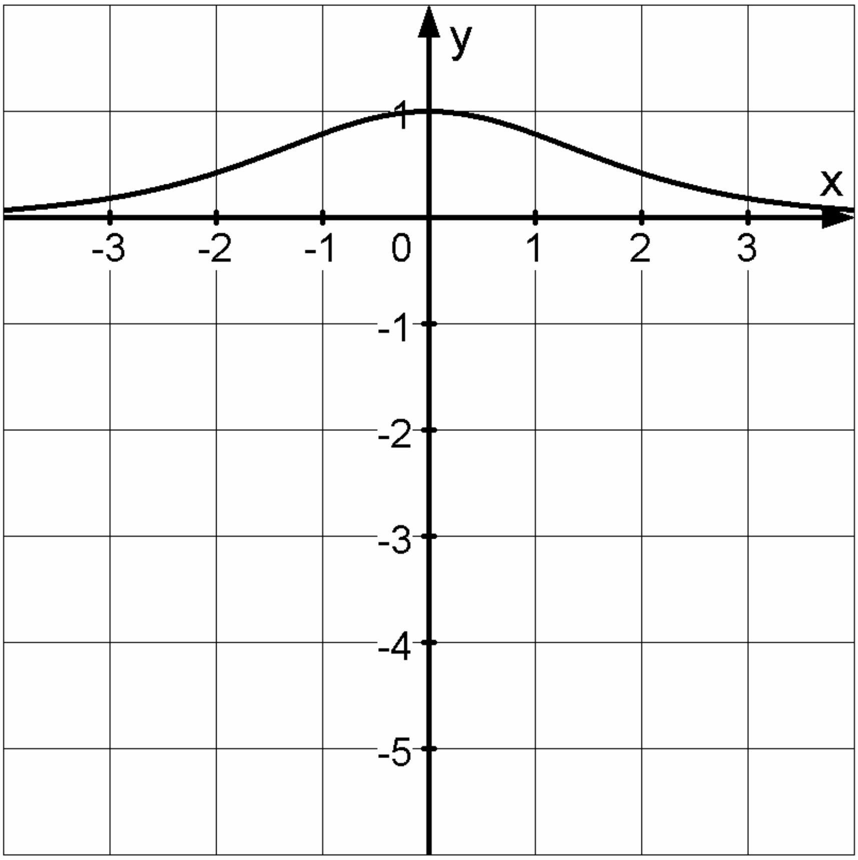
Name:____

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Name:________________________
(vom Prüfling einzutragen)

BE	
	1. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.



BE	
5	a) Begründen Sie, dass G_f stets oberhalb der x-Achse verläuft und berechnen Sie den Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse. Weisen Sie nach, dass für $x \to \pm\infty$ die Gerade $y = 0$ Asymptote von G_f ist.
4	b) Erklären Sie, wie man mit Hilfe des Graphen G_f ohne Berechnung von f' näherungsweise Werte von f' an einzelnen Stellen ermitteln kann. Bestimmen Sie auf die von Ihnen beschriebene Weise einen Näherungswert für $f'(1)$ auf eine Dezimale gerundet.
3	c) Die Funktion F mit $D_F = \mathbb{R}$ hat die Form $F(x) = \frac{c}{e^x+1}$ und ist eine Stammfunktion von f. Bestimmen Sie die Konstante c. [Zur Kontrolle: $F(x) = \frac{-4}{e^x+1}$]

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	d) Bestimmen Sie $F(0)$ und $F'(0)$ sowie das Verhalten von F an den Rändern von D_F. Begründen Sie, dass F streng monoton zunehmend in D_F ist.
4	e) Tragen Sie die Tangente an den Graphen von F im Punkt $P(0 \mid F(0))$ in nebenstehendes Koordinatensystem ein und skizzieren Sie anschließend den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in diese Abbildung.
6	f) Der Graph G_f, die x-Achse sowie die Geraden $x = -u$ und $x = u \; (u > 0)$ schließen ein Flächenstück vom Inhalt A(u) ein. Bestimmen Sie $\lim\limits_{u \to +\infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

2. Folgende Tabelle gibt für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1991 bis 1999 die Anzahl der Mobilfunkverträge in Deutschland jeweils zum Jahresende an.

Jahr	1991	1993	1995	1997	1999
Anzahl in Mio.	0,5	1,8	3,8	8,3	23,4

Die steigende Anzahl der Mobilfunkverträge lässt sich in diesem Zeitraum näherungsweise als exponentielles Wachstum auffassen und durch eine Exponentialfunktion der Form $N(x) = a \cdot e^{bx} \; (a, b \in \mathbb{R})$ beschreiben. N(x) ist dabei die Zahl der Mobilfunkverträge in Millionen, x ist die seit Jahresende 1991 vergangene Zeit in Jahren. Beispielsweise ist $x = 8$ für das Ende des Jahres 1999.

4	a) Bestimmen Sie a und b aus den Werten für die Jahre 1991 und 1999. Runden Sie b auf zwei Dezimalen. [Ergebnis: $a = 0{,}5$; $b = 0{,}48$]
4	b) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Funktionswertes N(x) für das Jahresende 1995 vom tatsächlichen Wert. Welcher Funktionswert ergibt sich für das Jahresende 2007? Bewerten Sie das Ergebnis im oben genannten Anwendungszusammenhang.
4	c) Bei einem exponentiellen Wachstum dauert es immer gleich lang, bis sich die Funktionswerte verdoppeln. Berechnen Sie diese Verdopplungszeit im vorliegenden Fall.
40	

BE

II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

4 1. a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D_f, die Nullstellen von f und das Symmetrieverhalten von G_f an.

6 b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_f an.

6 c) Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extrempunkts E von G_f.

[Zur Kontrolle: $E(0\,|\,\frac{1}{3})$]

6 d) Berechnen Sie f(2,5) sowie f(4) und skizzieren Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-7 \le x \le 7$.

7 2. a) $F: x \mapsto x + \ln\frac{3-x}{x+3}$ ist Stammfunktion von f im maximalen Definitionsbereich D_F (Nachweis nicht erforderlich).
Zeigen Sie, dass $D_F =]-3;3[$ der maximale Definitionsbereich von F ist.
Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, die G_f mit der x-Achse einschließt, auf zwei Dezimalen genau.

[Zur Kontrolle: $A \approx 0{,}83$]

4 b) Begründen Sie, beispielsweise mit Hilfe von Flächenbetrachtungen, dass die Integralfunktion $F_0: x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ im Intervall $]-3;3[$ drei Nullstellen hat.
(Hinweis: Die Nullstellen müssen nicht berechnet werden.)

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Betrachtet werden nun Funktionen der Form $f_{a,b}: x \mapsto \frac{x^2 - a}{x^2 - b}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq b$ im jeweils maximalen Definitionsbereich. Ihre Graphen werden mit $G_{a,b}$ bezeichnet. Beispielsweise erhält man für $a = 3$ und $b = 9$ obige Funktion f.

3 a) Was muss für b gelten, damit $f_{a,b}$ in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist?
Geben Sie die Zahl der Nullstellen in Abhängigkeit von a an.

4 b) Einer der drei abgebildeten Graphen $G_{a,b}$ gehört zum Fall $0 < b < a$.
Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen für den Fall $0 < b < a$ nicht in Betracht kommen.

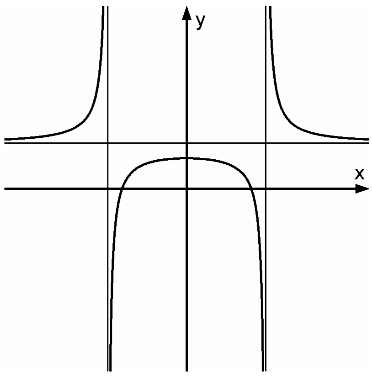


Abb. 1

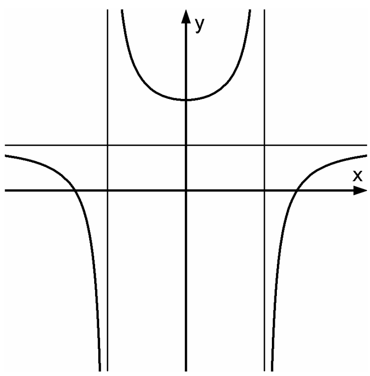


Abb. 2

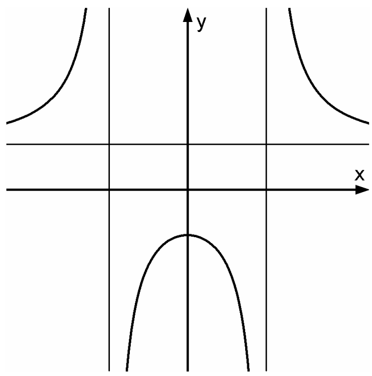


Abb. 3

40

GM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE

III.

1. Eine Schulklasse besteht aus 18 Jungen und 14 Mädchen. Bei einem Preisausschreiben gewinnt die Klasse 25 Karten für ein Fußball-Länderspiel.

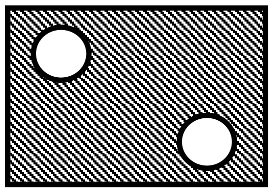
   Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 25-köpfige Gruppe zusammenzustellen, wenn

3 a) genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen,

4 b) genau 10 Mädchen in der Gruppe sein sollen, aber die beiden Freundinnen Lena und Petra entweder nur gemeinsam oder gar nicht mitfahren wollen?

5 2. Der Klassenleiter beschließt, die Karten zu verlosen. Er gibt dazu 25 Treffer und 7 Nieten in eine Urne und lässt jeden aus der Klasse einmal ziehen. Hans soll als Zweiter ein Los ziehen. Er beschwert sich, dass seine Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu erzielen, geringer sei als bei Jana, die als Erste ziehen wird.
Widerlegen Sie die Behauptung von Hans durch Rechnung.

3. Vor dem Stadion befindet sich eine Torwand mit zwei Löchern. Jürgen ist ein geübter Torwand-Schütze und trifft, wenn er auf das obere Loch zielt, dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 %. Für das untere Loch hat er sogar eine Trefferwahrscheinlichkeit von 40 %.



4 a) Jürgen schießt zuerst einmal auf das untere und dann einmal auf das obere Loch. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A: „Beide Schüsse treffen ihr Ziel nicht“ und B: „Genau ein Schuss trifft sein Ziel“.

5 b) Wie oft muss Jürgen auf das untere Loch mindestens schießen, damit er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einmal trifft?

6 c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jürgen, wenn er zuerst dreimal auf das untere und dann dreimal auf das obere Loch schießt, genau einmal sein Ziel trifft.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

6 d) Uwe vermutet, dass die Trefferwahrscheinlichkeit von Jürgen nicht konstant ist. Er geht davon aus, dass sie unmittelbar nach einem Treffer um $\frac{1}{10}$ des ursprünglichen Wertes ansteigt und unmittelbar nach einem Fehlschuss um $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Trefferwahrscheinlichkeit absinkt.
Jürgen schießt zweimal auf das untere Loch. Zeichnen Sie unter der Voraussetzung, dass Uwes Vermutung zutrifft, ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Jürgen genau einmal sein Ziel trifft.

4. Der Stadionsprecher behauptet, dass seit der Fußball-WM im eigenen Land die Fußballbegeisterung in der Stadt gestiegen sei und mindestens 80 % der Einwohner dieser Stadt für einen Ausbau des Stadions seien.

5 a) Um diese Behauptung zu testen, befragen die Schüler in der Halbzeitpause 100 zufällig ausgewählte Zuschauer. Wie muss die Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich lauten, wenn die Schüler die Behauptung des Stadionsprechers mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % irrtümlich ablehnen wollen?

2 b) Bewerten Sie den von den Schülern durchgeführten Test hinsichtlich seiner Eignung, die Behauptung des Stadionsprechers zu überprüfen.

40

BE	**IV.**
	1. Auf dem Sommerfest des örtlichen Gymnasiums wirbt der Förderverein um neue Mitglieder. Als Anreiz erhält jede Person, die dem Verein beitritt, auf den Jahresbeitrag einen Rabatt, der durch zweimaliges Werfen eines Laplace-Würfels ermittelt wird. Die erzielte Augensumme ergibt dabei den Rabatt in Prozent.
3	a) Begründen Sie, dass ein Neumitglied mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{12}$ einen Rabatt von genau 10 % bekommt.
2	b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten genau 2 von 10 Neumitgliedern einen Rabatt von jeweils genau 10 %?
5	c) Wie viele neue Mitglieder müssen mindestens würfeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 60 % wenigstens ein Neumitglied eine Ermäßigung von genau 10 % erhält?
5	d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt der Mittelwert der beiden von einem Ehepaar erwürfelten Rabatte genau 11 %?
	2. Der Vorstand des Fördervereins besteht aus 6 Frauen und 3 Männern.
3	a) Auf wie viele Arten können sich die Vorstandsmitglieder für ein Foto in einer Reihe nebeneinander aufstellen, wenn die drei Männer in der Mitte stehen sollen?
3	b) Zur Betreuung des Info-Standes auf dem Sommerfest teilen sich alle 9 Vorstandsmitglieder in 3 Dreiergruppen auf, die nacheinander in drei Schichten am Stand anwesend sind. Wie viele verschiedene Möglichkeiten zur Aufteilung der Personen auf die Schichten gibt es, wenn die beiden Vorstandsmitglieder Anne und Birgit zusammen mit einer weiteren Frau die erste Schicht übernehmen?
	3. 40 % der Besucher des Sommerfestes sind männlich; 30 % der Besucher trinken nur Fruchtsaft; 42 % der Besucher sind weiblich und trinken nicht nur Fruchtsaft.
5	a) Untersuchen Sie die Ereignisse F: „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt nur Fruchtsaft“ und W: „Ein zufällig ausgewählter Besucher ist weiblich“ auf stochastische Unabhängigkeit.
	Im Folgenden wird das Ereignis C: „Ein zufällig ausgewählter Besucher ist männlich oder trinkt nicht nur Fruchtsaft“ betrachtet.
4	b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C.
2	c) Beschreiben Sie das Gegenereignis von C in Worten.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
8	4. Die Vorsitzende des Fördervereins möchte der Schule einen neuen Schulgarten aus den Mitteln des Vereins finanzieren. Sie geht dabei von einer Zustimmungsquote von 60 % unter den Schülern aus. Der Kassenwart spricht sich gegen die Finanzierung aus, da er mit einer Zustimmungsquote von höchstens 40 % rechnet. Er schlägt eine Befragung von 50 zufällig ausgewählten Schülern vor. Seine Behauptung soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % irrtümlich verworfen werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel mit einem möglichst großen Ablehnungsbereich. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art unter der Annahme, dass die Vorsitzende mit ihrer Behauptung bezüglich der Zustimmungsquote Recht hat.
40	

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

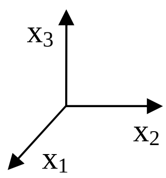
V.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(8|2|0)$, $B(8|3|2)$, $C(8|-3|2)$ und $D(8|-2|0)$ sowie der Punkt $B'(0|3|2)$ gegeben.

5 1. a) Die Punkte A, B und B' spannen eine Ebene E auf. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_2 - x_3 - 4 = 0$]

8 b) Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, und tragen Sie es in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein.
Welche Symmetrieeigenschaft und welche besondere Lage im Koordinatensystem hat das Trapez?



5 c) Der Punkt A' ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der x_2-Achse. Berechnen Sie die Koordinaten von A'. Weisen Sie nach, dass das Dreieck DAA' rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D' so, dass das Viereck $DAA'D'$ ein Rechteck ist.

[Teilergebnis: $A'(0|2|0)$]

3 d) Der Punkt C' entsteht durch Spiegelung des Punktes B' an der x_1x_3-Ebene. Geben Sie die Koordinaten von C' an und zeichnen Sie das Prisma $ABCDA'B'C'D'$ in die Zeichnung von Teilaufgabe 1b ein.

2. Beim Prisma $ABCDA'B'C'D'$ aus Teilaufgabe 1d handelt es sich um ein gerades Prisma (Nachweis nicht erforderlich). Dieses Prisma gibt die Form eines 16 m langen Stücks eines Kanals wieder (1 LE in der Zeichnung entspricht 2 m).

4 a) Berechnen Sie den Neigungswinkel α der Kanalböschung $AA'B'B$ gegenüber der horizontalen x_1x_2-Ebene.

7 b) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser das 16 m lange Kanalstück enthält, wenn der Kanal bis oben gefüllt ist.

[Ergebnis: $640\ \text{m}^3$]

8 c) Während einer Hitzeperiode führt das 16 m lange Kanalstück nur noch 45 % der in Teilaufgabe 2b bestimmten Wassermenge.
Weisen Sie zunächst allgemein nach, dass zwischen der Wassertiefe t des Kanals und der zugehörigen Breite b der Wasseroberfläche – jeweils gemessen in m – folgender Zusammenhang besteht: $b = t + 8\,\text{m}$.
Berechnen Sie anschließend die Wassertiefe des Kanals in der Hitzeperiode.

40

BE	
	VI.
	Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O die Punkte $A(5\,\vert\,2\,\vert\,2)$ und $C(12\,\vert\,2\,\vert\,26)$, die Ebene $E: 4x_1 + 3x_3 - 51 = 0$ sowie die Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2	1. a) Zeigen Sie, dass A Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.
8	b) Die Geraden g und h spannen eine Ebene F auf. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform und zeigen Sie, dass F eine Lotebene zur Ebene E ist. Welche besonderen Lagen im Koordinatensystem haben die beiden Ebenen E und F? [mögliches Teilergebnis: $F:\ x_2 - 2 = 0$]
6	c) Weisen Sie nach, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft, und ermitteln Sie ihren Abstand von der Ebene E.
5	d) Berechnen Sie den Schnittwinkel α von g und h. Geben Sie mit Begründung die Größe des Schnittwinkels von h und E an.
6	2. a) Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte B und B' auf der Geraden g so, dass die Dreiecke ABC und ACB' gleichschenklig mit Basis $[BC]$ bzw. $[B'C]$ sind. B sei derjenige der beiden Punkte mit positiver x_1-Koordinate. [Teilergebnis: $B(20\,\vert\,2\,\vert\,-18)$]
3	b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass das Dreieck BCB' rechtwinklig ist.
3	c) M ist Mittelpunkt der Strecke [BC]. Berechnen Sie die Koordinaten von M und begründen Sie ohne Rechnung, dass $[AM]$ eine Höhe des Dreiecks ABC ist. [Teilergebnis: $M(16\,\vert\,2\,\vert\,4)$]
7	d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen Flächeninhalt von 250 Flächeneinheiten hat, und begründen Sie, dass für jede Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze $S(s_1\,\vert\,s_2\,\vert\,s_3)$ mit $s_2 \neq 2$ gilt: $V_{ABCS} = \frac{250}{3} \cdot \vert s_2 - 2 \vert$ Volumeneinheiten.
40	