LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 1999 GRUNDKURS ANALYSIS I

1999 I

1. $$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln(x))}$$

a) Maximaler Definitionsbereich:

- Für $\ln(x)$ gilt $D_f=\mathbb{R}^+$

Außerdem darf der Nenner nicht Null werden:

- $x\neq 0$
- $1-\ln(x)\neq 0 \; oder \; \ln(x)\neq 1 \; oder \; x\neq e^1$

Verhalten an den Grenzen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{\underbrace{x}_{\to\infty}\cdot\underbrace{(1-\ln(x))}_{\to-\infty}}=0$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x)=\frac{1}{e}\cdot\overbrace{\frac{1}{1-\ln(e+0)}}^{\to-\infty}\to-\infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=\frac{1}{e}\cdot\overbrace{\frac{1}{1-\ln(e-0)}}^{\to+\infty}\to+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{\underbrace{x\cdot(1-\ln(x))}_{\to0+}}\to\infty$$ (siehe Angabe)

b) $f(x)=x^{-1}\cdot(1-\ln(x))^{-1}$

$$[f(x)]^2\cdot\ln(x)=\frac{\ln(x)}{x^2\cdot(1-\ln(x))^2}=\frac{\ln(x)}{x^2-2x^2\ln(x)+x^2(\ln(x))^2}$$

$$f'(x)=-x^{-2}\cdot(1-\ln(x))^{-1}-x^{-1}\cdot(1-\ln(x))^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2\cdot(1-\ln(x))}+\frac{1}{x^2\cdot(1-\ln(x))^2}=\frac{-(1-\ln(x))}{x^2\cdot(1-\ln(x))^2}+\frac{1}{x^2\cdot(1-\ln(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{-1+\ln(x)+1}{x^2\cdot(1-\ln(x))^2}=[f(x)]^2\cdot\ln(x)$$

Monotonieverhalten:

$f'(x)=0 \quad f(x)\neq 0\Rightarrow f'(x)=0$ für $\ln(x)=0\Rightarrow x=1$

	$x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	-	0	+
G_f	↘	TIP	↗

$f(1)=1$

Tiefpunkt bei (1|1)

2 $h(x)=\frac{2}{x}=2\cdot x^{-1}\,;\,D_h=\mathbb{R}^+$

a) <u>Bestimmung der x-Koordinate des Schnittpunktes</u>:

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{x\cdot(1-\ln(x))} \qquad |\cdot x$$

$$2=\frac{1}{1-\ln(x)} \qquad |()^{-1}$$

$$\frac{1}{2}=1-\ln(x)$$

$$\ln(x)=\frac{1}{2} \qquad |e^{()}$$

$$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

<u>Bestimmung der y-Koordinate</u>:

$$h(\sqrt{e})=\frac{2}{\sqrt{e}}$$

Schnittpunkt: $S\left(\sqrt{e}\middle|\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$

<u>Steigung der Tangenten an f(x)</u>:

$$f'\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\sqrt{e}^2\cdot\left(1-\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e\cdot(\frac{1}{2})^2}=\frac{2}{e}\approx 0{,}74$$

<u>Ableitung von h(x)</u>:

$$h'(x)=-2\cdot x^{-2}=-\frac{2}{x^2}$$

$$h'(\sqrt{e})=\frac{-2}{e}\approx -0{,}74$$

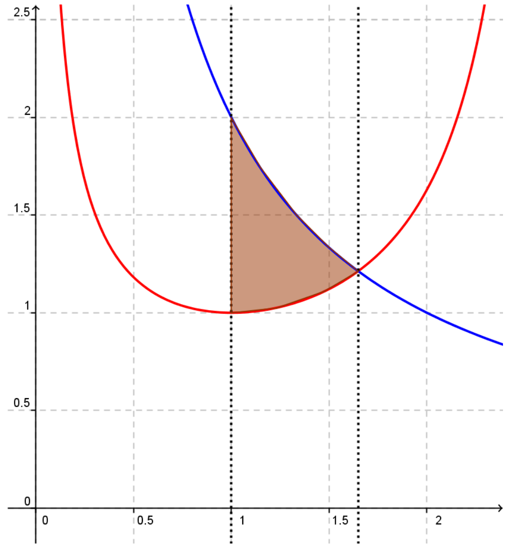
Schnittwinkel:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=0{,}74\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=36{,}5\,°\Rightarrow\alpha\approx 73\,°$$

b)

3. $F(x) = -\ln(1-\ln(x))$

a) $F'(x) = -\left[\frac{1}{1-\ln(x)} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{x(1-\ln(x))}$



b) $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx = F(\sqrt{e}) - F(1) = -\ln(1-\frac{1}{2}) - \ln(1-0)$

$= -\ln(0{,}5) = \ln(2) \approx 0{,}69$

$\int_1^{\sqrt{e}} h(x)\,dx = 2\ln(\sqrt{e}) - 2\ln(1) = 1$

$A \approx 1 - 0{,}69 = 0{,}31$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}65 = 0{,}325$

$\frac{325}{310} \approx 1{,}05$

Abweichung etwa 5%