LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN GK 1998:

ANALYSIS I

1998 Analysis I

1 $f(x)=\frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right] \quad D_f=\mathbb{R}^+$

a) Produktregel $f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[1+(\ln x)^2\right]+\frac{x}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(\ln x)^2+\ln(x)$

$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+(\ln x)^2+2\ln(x)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln(x)+1\right)^2$

$f'(x)\geq 0\Rightarrow G_f$ monoton steigend.

$f'(x)=0\Rightarrow \ln(x)=-1\Rightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

VZT	$0<x<\frac{1}{e}$	$x=\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x$
$f'(x)$	+	0	+
G_f	↗	TEP	↗

Der Graph besitzt einen Terrassenpunkt und keine Extremwerte.

b) $f''(x)=\frac{2\cdot 1}{2}\frac{(\ln(x)+1)\cdot 1}{x}=\frac{\ln(x)+1}{x}$

$f''\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{\ln(e^{-1})+1}{\frac{1}{e}}=e\cdot(-1+1)=0$

VZT	$0<x<\frac{1}{e}$	$x=\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}<x$
$f''(x)$	-	0	+
G_f	↻	WEP	↺

Der Graph besitzt einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente (also einen Terrassenpunkt).

Koordinaten: $f(e^{-1})=\frac{1}{2}e\cdot\left[1+(-1)^2\right]=\frac{1}{e}$

$T\left(\frac{1}{e}\middle|\frac{1}{e}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to+\infty}\underbrace{\left[1+(\ln x)^2\right]}_{\to+\infty}=+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{x}{2}}_{\to 0}\underbrace{\left[1+(\ln x)^2\right]}_{\to+\infty} = 0$$

wegen Vorbemerkung oder da jede Potenz von ln(x) langsamer wächst als jede Potenz von x

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\underbrace{(1+\ln x)^2}_{\to+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\underbrace{(1+\ln x)}_{\to-\infty}^2 = +\infty$$

Da der Graph monoton steigend ist, befindet sich der kleinste Wert beim kleinsten x-Wert und der größte Wert im positiv Unendlichen:

$W_f =]0;+\infty[$ Der Graph befindet sich also nur im I.Quadranten.

d) $f(x) = \frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right] = x$ Da $x \neq 0$ darf auf beiden Seiten durch x dividiert werden.

$$\frac{1}{2}\left[1+(\ln x)^2\right] = 1$$

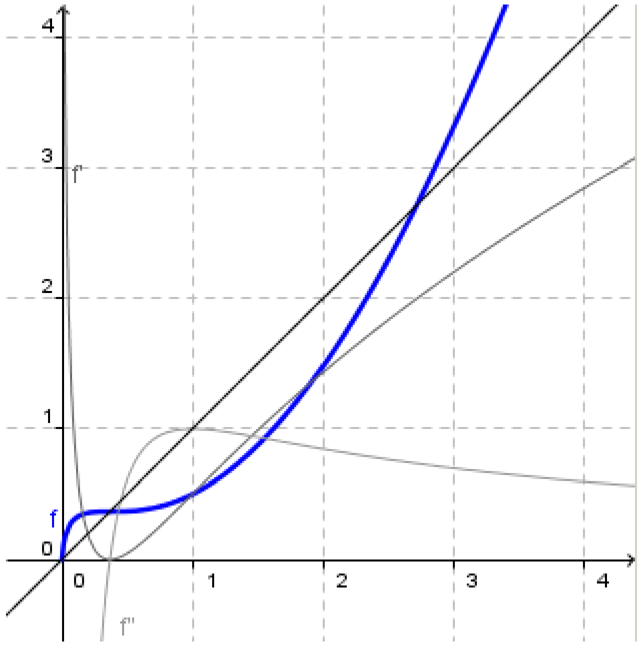
$$1+(\ln x)^2 = 2$$

$$(\ln x)^2 = 1$$

$$\ln(x) = \pm 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{e} \wedge x_2 = e$$

Der Graph trifft in den Punkten $S_1\left(\frac{1}{e}\middle|\frac{1}{e}\right)$ und $S_2(e|e)$ auf die Winkelhalbierende y = x.

2 $f(1{,}5) \approx 0{,}87;\quad f(4) \approx 5{,}84$



3 a) $F(x) = \frac{x^2}{8}\cdot\left[2(\ln x)^2 - 2\ln x + 3\right]$

$$F'(x)=\frac{2\cdot x}{8}\left[2(\ln x)^2-2\ln x+3\right]+\frac{x^2}{8}\cdot\left[4\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right]$$

$$F'(x)=\frac{x}{2}\cdot(\ln x)^2-\frac{x}{2}\ln x+\frac{6}{8}x+\frac{x}{2}\ln x-\frac{x}{4}$$

$$F'(x)=\frac{x}{2}(\ln x)^2+\frac{1}{2}x=\frac{x}{2}\left[(\ln x)^2+1\right] \quad ✓$$

b) $$\int_u^e f(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{8}\left(2(\ln x)^2-2\ln x+3\right)\right]_u^e=\frac{e^2}{8}(2-2+3)-\frac{u^2}{8}\left(2(\ln u)^2-2\ln u+3\right)$$

$$=\frac{3}{8}e^2-\frac{u^2}{8}\left(2(\ln u)^2-2\ln u+3\right)$$

$$\lim_{u\to 0}\int_u^e f(x)\,dx=\frac{3}{8}e^2$$

da der u^2 Term schneller gegen 0 geht, als die Klammer gegen $+\infty$

4 Berechnung der Tangentensteigung des Graphen an der Stelle $x=\frac{1}{e}$:

$f'(e^{-1})=0$ (waagerecht)

also hat die Umkehrfunktion an dieser Stelle eine senkrechte Tangente!

Die beiden Graphen treffen sich also unter einem Winkel von 90°.