1993 III Aufgabe

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

sowie die beiden Punkte A(1|0|-4) und C(-1|2|4) gegeben.

A und C bestimmen die Gerade h.

4 1.a) Begründen Sie, dass der Mittelpunkt M der Streakce [AC] Schnittpunkt der Geraden g und h ist.

3 b) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h zueinander senkrecht sind.

2. Auf g liegen zwei Punkte B und D so, dass die beiden Dreiecke ABC und ACD bei B bzw. bei D rechtwinklig sind.

3 a) Geben Sie mit Begründung an, welches besondere Viereck die Punkte A, B, C und D bestimmen.

8 b) Berechnen Sie die Koordinaten von B und D

[mögliches Ergebnis: B(3|4|0); D(-3|-2|0)]

3 c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD

3. Die Geraden g und h bestimmen die Ebene E

5 a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform an.

[mögliches Ergebnis: $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2 = 0$]

6 b) Vom Punkt S(0|-5|1,5) aus wird ein Lot auf die Ebene E gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes F.

[Ergebnis: F(-3|-2|0), Eckpunkt des Vierecks ABCD]

8 c) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide ABCDS mit Grundfläche ABCD und Spitze S

(Hinweis: ohne Begründung darf verwendet werden, dass alle Seitendreiecke rechtwinklig sind.)

40

1993 III Lösung

1. a) Zu zeigen:

- g und h haben unterschiedliche Richtungsvektoren
- M liegt sowohl auf g, wie auch auf h

Richtungsvektoren:

Richtungsvektor von g: $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

Richtungsvektor von h: $\vec{v}\,'=\vec{B}-\vec{A}=\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}$ oder $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$

sind nicht linear abhängig, da z.B. $\vec{u}$ keine x_3 Komponente und $\vec{v}$ schon.

M auf beiden Geraden:

$\vec{M}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B})=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ liegt per Definition auf $h=AB$

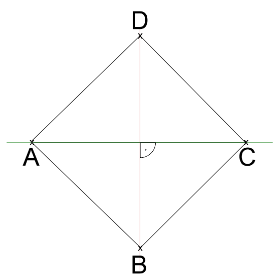
$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, alle drei Gleichungen sind für $\mu=1$ erfüllt.

b) Zu zeigen: Die Richtungsvektoren stehen senkrecht aufeinander.

$\vec{u}\circ\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}=1\cdot-1+1\cdot1+0\cdot4=0$ ✓

2 a) Da g senkrecht durch den Mittelpunkt von A und C geht, ist h die Mittelsenkrechte und somit auch die Symmetrieachse von A und C.

Die Punkte B und D sollen jeweils auf dieser Symmetrieachse liegen. Dann entstehen aber zwei gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke:



Die gleichschenklig-rechwinkligen Dreiecke besitzen jeweils einen Basiswinkel von 45° und deshalb entstehen für das entstehende Viereck bei A und C jeweils ein 90°-Winkel. Zusammen mit den geforderten 90°-Winkeln entsteht ein Viereck mit vier rechten Winkeln. Das ist ein Quadrat.

b) Weg A: Berechne die Länge AM. „Dehne" den Richtungsvektor der Geraden g auf diese Länge und addiere ihn zu M

Weg B: Betrachte einen beliebigen Punkt X der Geraden g, setze das Skalarprodukt $\vec{AX}\circ\vec{BX}=0$ und berechne daraus μ .

Zu Weg A:

$\vec{AM}=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ mit $|\vec{AM}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

„Dehne“ $\vec{u}$: $k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\k\\0\end{pmatrix}$ mit Länge $\sqrt{k^2+k^2+0^2}=3\sqrt{2}$

oder $2k^2=18\Rightarrow k=\pm 3$

$\vec{B}=\vec{M}+\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ $\quad\vec{D}=\vec{M}+\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\end{pmatrix}$

Weg B:

$\overrightarrow{AX}=\vec{X}-\vec{A}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\mu\\\mu\\4\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AY}=\begin{pmatrix}\mu\\-2+\mu\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AX}\circ\overrightarrow{AY}=(\mu-2)\cdot\mu+\mu(\mu-2)-16=2\mu^2-4\mu-16=0$

$\mu-2\mu-8=0$

$(\mu-4)(\mu+2)=0=¿\mu_1=4;\mu_2=-2$ eingesetzt in die Geradengleichung ergibt B und D wie angegeben.

c) Seitenlänge des Quadrates: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(\overrightarrow{AM})^2+(\overrightarrow{AM})^2}=6$ (Pythagoras)

Flächeninhalt des Quadrates: $A=6\cdot 6=36$

3. a) $\vec{n}\,'=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

Koordinatengleichung:

$2x_1-2x_2+x_3+c=0$ M einsetzen: $-2+c=0\Rightarrow c=2$

Koordinatenform:

$E:2x_1-2x_2+x_3+2=0$

b) Suche den Schnittpunkt der Geraden $t:\vec{S}+\lambda\cdot\vec{n}$ mit der Ebene E:

$t:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\-5\\1{,}5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ in E:

$2\cdot 2\lambda-2\cdot(-5-2\lambda)+(1{,}5+\lambda)+2=0$

$4\lambda+10+4\lambda+1{,}5+\lambda+2=0$

$9\lambda+13{,}5=0\Rightarrow\lambda=-1{,}5$ in t einsetzen:

$\vec{F}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\0\end{pmatrix}$

c) Die Pyramide ist symmetrisch aufgrund der Lage der Spitze S über der Symmetrieachse des Quadrates.

Für die Berechnung der Flächeninhalte der Seitendreiecke wird die Höhe des Punktes S über der Ebene E benötigt:

$h=|\overrightarrow{FS}|=\sqrt{3^2+3^2+1{,}5^2}=\sqrt{20{,}25}=4{,}5$

$A_{\Delta\, CDS}=\frac{1}{2}6\cdot 4{,}5=13{,}5$

Für das $\Delta\, BCS$ wird noch $|\overrightarrow{CS}|=\sqrt{1^2+7^2+2{,}5^2}=\sqrt{56{,}25}=7{,}5$ benötigt:

$A_{\Delta\, BCS}=\frac{1}{2}6\cdot 7{,}5=22{,}5$

$O=2\, A_{\Delta\, BCS}+2\, A_{\Delta CDS}+G=27+45+36=108$

1993 IV Aufgabe

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1|1|1), B(10|-2|4), C(4|4|1) und P(7|3|2) gegeben.

5 1.a) Zeigen Sie, dass die drei Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen, und berechnen Sie den Winkel α zwischen den beiden Halbgeraden [AB und [AC (auf Grad gerundet).

6 b) Die Geraden AB und AC spannen eine Ebene E auf. Bestimmen Sie je ein Gleichung für E in Parameter- und in Normalenform.

[mögliches Teilergebnis: $x_1 - x_2 - 4x_3 + 4 = 0$]

10 2.a) Gegeben ist die Gleichung $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$ mit geeignetem λ und μ. Berechnen Sie λ und μ. Was folgt aus dieser Gleichung für die Lage des Punktes P sowie für Länge und Richtung des Vektors $\overrightarrow{CP}$? Verdeutlichen Sie Ihre Ergebnisse durch eine geeignete Zeichnung.

[zur Kontrolle: $\lambda = \frac{1}{3}; \mu = 1$]

6 b) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt T der Geraden AP und BC die Strecke [AP]?

3 c) In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke CPT und ABT?

10 3. Die Lotgerade zur Ebene E im Punkt P werde mit s bezeichnet. Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf s, die von A die Entfernung 13 (Längeneinheiten) haben.

40

1993/IV Lösung

1. a) Wenn sich zwischen [AB und [AC ein Winkel ungleich 0° ergibt, dann liegen die drei Punkte auch nicht auf einer Geraden:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|u| \cdot |v|} = \frac{2}{\sqrt{22}} = 0{,}43 \qquad \Rightarrow \phi = 64{,}76 \approx 65°$$

b) A ist Aufpunkt, dann kann man die Angaben aus a) weiterverwenden:

Parameterform: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zur Normalenform: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$-x_1 + x_2 + 4x_3 + c = 0$ A einsetzen: $-1 + 1 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -4$

$E: -x_1 + x_2 + 4x_3 - 4 = 0$

2. a) Es ergibt sich ein Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccll} 6 & = & 9\lambda & +\mu \\ 2 & = & -3\lambda & +\mu \\ 1 & = & 3\lambda & +0 \end{array}$$ aus (III) folgt $\lambda = \frac{1}{3}$ und mit (II) folgt $\mu = 1$

eingesetzt in (I) ergibt das eine wahre Aussage. ✓

Der Punkt liegt in der Ebene E

Wegen $\lambda = \frac{1}{3}$ gilt $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ und ist parallel zu $\overrightarrow{AB}$

P(7|3|2) sind dann die Koordinaten.

3 $l: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$