LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 1992

GEOMETRIE II

Angabe

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(-6|-6|0), B(-4|5|10) und C(8|-1|-2)

sowie die Gerade g durch den Punkt T(0|6|0) und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

7 1 a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte A, B und C eine Ebene E festgelegt ist, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$]

5 b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes M von g und E. Welche besondere Lage hat g zu E?

3 c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes T zur Ebene E.

4 2 a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis [BC] bilden.

4 b) Der Punkt A' bildet mit A, B und C eine Raute ABA'C. Berechnen Sie die Koordinaten von A'. [Ergebnis: A'(10|10|8)]

3 c) Zeigen Sie: Der Schnittpunkt M der Geraden g mit der Ebene E ist der Mittelpunkt der Raute.

5 d) Berechnen Sie den Flächeninhalt J der Raute ABA'C. [Ergebnis: J=216]

3 Durch die Punkte A und B wird die Gerade h festgelegt.

3 a) Begründen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind.

6 b) Berechnen Sie den Abstand a der windschiefen Geraden g und h.
(Hinweis: Sie können das Ergebnis von Teilaufgabe 2 d vorteilhaft einsetzen.)

1992 Geo II Lösung

1.

a) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ müssen linear unabhängig sein, dann spannen sie eine Ebene auf.

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\11\\10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}14\\5\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AC}$

für die erste Komponente gilt $k=\frac{1}{7}$, für die dritte Komponente $k=-5$.

Es gibt also kein k, welches alle drei Gleichungen erfüllt und $\overrightarrow{AB}$ ist also linear unabhängig zu $\overrightarrow{AC}$, sie spannen also eine Ebene auf.

$\vec{n}\,'=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\11\\10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}14\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-72\\144\\-144\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

Normalenform:

$x_1-2x_2+2x_3+c=0$

Einsetzen von A ergibt c:

$-6-2\cdot(-6)+2\cdot0+c=0$

$c=-6$ also $E: x_1-2\mathrm{x}_2+2x_3-6=0$ ✓

b) Setze die Parameterform von g in die Normalenform von E:

$g:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$1\cdot(\lambda)-2(6-2\lambda)+2(2\lambda)-6=0$

$\lambda-12+4\lambda+4\lambda-6=0$

$9\lambda=18\Rightarrow\lambda=2$

In Geradengleichung einsetzen ergibt:

$\vec{M}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor von g stimmt mit dem Normalenvektor von E überein, also steht die Gerade g senkrecht auf der Ebene E.

c) Hesse-Normalform von E:

$$|\vec{n}|=3 \Rightarrow HNF(E)=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3-2=0$$

Einsetzen der Koordinaten in die HNF(E) ergibt:

$$\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{2}{3}\cdot 0-2=-6$$

T ist also 6 Längeneinheiten von E entfernt.

2 a) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+11^2+10^2}=\sqrt{225}=15$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{14^2+5^2+2^2}=\sqrt{225}=15$$

Beide Schenkel sind also gleichgroß.

A' ergibt sich, indem man $\overrightarrow{AC}$ von B aus anträgt, denn in einer Raute sind gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang:

$$\vec{A}\,'=\vec{B}+\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\5\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14\\5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\10\\8\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

c) Eigenschaften des Rautenmittelpunktes:

$$\vec{R}=\frac{1}{4}\left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{A}\,'\right)=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-6-4+8+10\\-6+5-1+10\\0+10-2+8\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}=\vec{M} \quad \checkmark$$

Stimmt also überein.

d) $J=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{72^2+144^2+144^2}=72\sqrt{1+4+4}=72\cdot 3=216$

3. a) $h:\vec{X}=\vec{A}+\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-6\\-6\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\11\\10\end{pmatrix}$

Untersuche die lineare Abhängigkeit der Richtungsvektoren:

$\begin{pmatrix}2\\11\\10\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ k müsste für die erste Komponente positive und für die zweite negativ sein.💣

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

Gemeinsame Punkte sind nicht möglich, da AB die Verlängerung einer Seite der Raute darstellt, während g senkrecht zur Zeichenfläche durch den Mittelpunkt verläuft.

Angenommen die Geraden würden sich schneiden, dann müsste der Rautenmittelpunkt auf einer Rautenseite liegen.💣

b) Gesucht ist die halbe Höhe der Raute.

Der Flächeninhalt einer Raute berechnet sich zu $J = g \cdot h$

Dabei ist [AB] die Grundlinie und hat die Länge $g = 15$ (siehe Teilaufgabe 2a)

J ist der Flächeninhalt und es gilt J = 216 (Teilaufgabe 2d)

also gilt $h = \frac{J}{g} = \frac{216}{15} = \frac{72}{5} = 14{,}4$ und

Der Abstand der windschiefen Geraden beträgt $14{,}4 : 2 = 7{,}2$