LÖSUNG ABITUR-AUFGABEN 1992

GEOMETRIE I

Angabe

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(5|5|-3), B(3|4|-1) und C(5|2|0) sowie die Gerade

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

gegeben.

7 1 a) Zeigen Sie, dass durch die Punkte A, B und C eine Ebene E festgelegt ist, und bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.
[mögliches Ergebnis: E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0$]

3 b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P von g und E.

6 2 a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Basis [AC] bilden.

5 b) Berechnen Sie für das Dreieck ABC den Radius des Umkreises.

4 c) Der Punkt D bildet mit A, B und C ein Quadrat. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

6 3 Bestimmen Sie die Gleichungen zweier Ebenen F und G, die zu E parallel sind und von E jeweils einen Abstand von 6 Längeneinheiten haben.
[mögliches Teilergebnis F: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 27 = 0$]

9 4 S_1 und S_2 sind die Spitzen zweier Pyramiden, deren Grundfläche das Quadrat ABCD ist und deren Volumen jeweils 18 Volumeneinheiten beträgt. Berechnen Sie die Koordinaten von S_1 und S_2, wenn zusätzlich gefordert wird, dass S_1 und S_2 auf der Geraden g liegen sollen.

1992 Geo I Lösung

1.

a) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ müssen linear unabhängig sein, dann spannen sie eine Ebene auf.

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-3\\+3\end{pmatrix}$ Allein wegen der x_1-Komponente können die beiden Vektoren nicht linear abhängig sein. Also spannen A, B und C eine Ebene auf.

$\vec{n}\,'=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}$ Also ein möglicher Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und Koordinatenform:

$$x_1+2x_2+2x_3+c=0$$

A einsetzen:

$$5+10-6+c=0\Rightarrow c=-9$$

also $E: x_1+2x_2+2x_3-9=0$

b) Setze die Parameterform von g in die Normalenform von E:

$$(8+2\lambda)+2(5+\lambda)+2(-3-\lambda)-9=0$$

$$8+2\lambda+10+2\lambda-6-2\lambda-9=0$$

$2\lambda+3=0\Rightarrow\lambda=-\frac{3}{2}$ in Geradengleichung einsetzen ergibt:

$$\vec{P}=\begin{pmatrix}5\\3,5\\-1,5\end{pmatrix}$$

2. a) Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck muss seinen rechten Winkel gegenüber der Basis haben, denn die Basiswinkel müssen kleiner als 90° sein (sonst wären beide 90° und damit die Figur kein Dreieck mehr).
Zu zeigen ist also der rechte Winkel bei B und die Gleichschenkligkeit.

$$\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=-2\cdot 2+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 1=-4+2+2=0$$

$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{9}=3=|\overrightarrow{BC}|$$

b) Der Umkreis entspricht bei diesem Dreieck dem Thaleskreis. Also ergibt sich als Radius

$$r=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0^2+3^2+3^2}=\frac{1}{2}3\sqrt{2}$$

c) Da das Quadrat lauter gleichlange Seiten hat, liegt D als Spiegelpunkt zu B. Am leichten erreicht man ihn, wenn man den Vektor $\vec{BC}$ an $\vec{A}$ anlegt:

$$\vec{D}=\vec{A}+\vec{BC}=\begin{pmatrix}5\\5\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\3\\-2\end{pmatrix}$$

3 Bringe E in die Hesse-Normalform:

$$|\vec{n}|=\sqrt{1+4+4}=3$$

$$HNF(E): \frac{1}{3}\left(x_1 + 2\,x_2 + 2x_3 - 9\right) = 0$$

$$HNF(E): \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \underbrace{-3}_{\text{gerichteter Abstand zum Ursprung}} = 0$$

$$HNF(F): \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{3}x_3 - 9 = 0 \quad \text{um 6 weiter vom Ursprung entfernt}$$

$$HNF(F): \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{3}x_3 + 3 = 0 \quad \text{um 6 durch den Ursprung hindurch}$$

4. Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand des Punktes von der Ebene E. Setze also die Geradenkoordinaten in die HNF(E)

$$h = \left|\frac{(8+2\lambda)}{3} + \frac{2\cdot(5+\lambda)}{3} + \frac{2(-3-\lambda)}{3} - 3\right| = \left|\frac{2\lambda+12}{3} - 3\right| = \left|\frac{2}{3}\lambda + 1\right|$$

$$G = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot h\cdot G = \frac{1}{3}\cdot\left|\frac{2}{3}\lambda+1\right|\cdot\frac{9}{2} = \frac{3}{2}\cdot\left|\frac{2}{3}\lambda+1\right| = 18$$

$$\left|\frac{2}{3}\lambda+1\right| = \frac{18\cdot 2}{3} = 12$$

$$\frac{2}{3}\lambda + 1 = \pm 12$$

a) $\frac{2}{3}\lambda + 1 = -12 \Rightarrow \frac{2}{3}\lambda = -13 \Rightarrow \lambda_1 = 1{,}5\cdot(-13) = -19{,}5$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - 19{,}5\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ -14{,}5 \\ +16{,}5 \end{pmatrix}$$

b) $\frac{2}{3}\lambda + 1 = +12 \Rightarrow \frac{2}{3}\lambda = 11 \Rightarrow \lambda_2 = 16{,}5$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 16{,}5\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 21{,}5 \\ -19{,}5 \end{pmatrix}$$