LÖSUNG

ABITUR-

AUFGABEN 1987

GRUNDKURS

ANALYSIS I

Angabe

Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=\frac{2e^x}{2-e^x}$$

mit maximalem Definitionsbereich D_f. Ihr Graph sei G_f

3 1 a) Bestimmen Sie D_f und untersuchen Sie G_f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

6 b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern von D_f

6 c) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie die Wertemenge W_f an.

6 d) Zeichnen Sie unter Verwendeung der bisherigen Ergebnisse und von f'(0) den Graphen G_f im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ (Längeneinheit 1cm).

4 2 a) Zeigen Sie, dass $F(x)=\ln\left(\frac{1}{(2-e^x)^2}\right)$ mit $x \in D_f$ eine Stammfunktion von f ist.

5 b) Geben Sie die Integralfunktion

$$I(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

$x \in R_0^-$ in integralfreier Darstellung an, und bilden Sie $\lim_{x\to-\infty} I(x)$. Wie lässt sich der Betrag des Grenzwertes deuten?

7 3 a) Begründen Sie, dass f in ganz D_f umkehrbar ist. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ mit ihrem Definitionsbereich $D_{f^{-1}}$

3 b) Tragen Sie den Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d ein.

1992 Geo I Lösung

1.

a) Definitionsmenge: Der Nenner darf nicht 0 werden, also $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 1}{2-1} = 2 \quad S_y(0|2)$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ Dies kann nicht geschehen, da der Zähler ausschließlich positive Werte annehmen kann (Exponentialfunktion)

b)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{2-e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\frac{e^x}{e^x}}{\frac{2}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}} = \frac{2}{-1} = -2$$ („Kürzen“ mit e^x)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{2 \cdot 0}{2-0} = 0$

$\lim_{x \to \ln 2^+} f(x) = -\infty$, da Zähler positiv und Nenner negativ

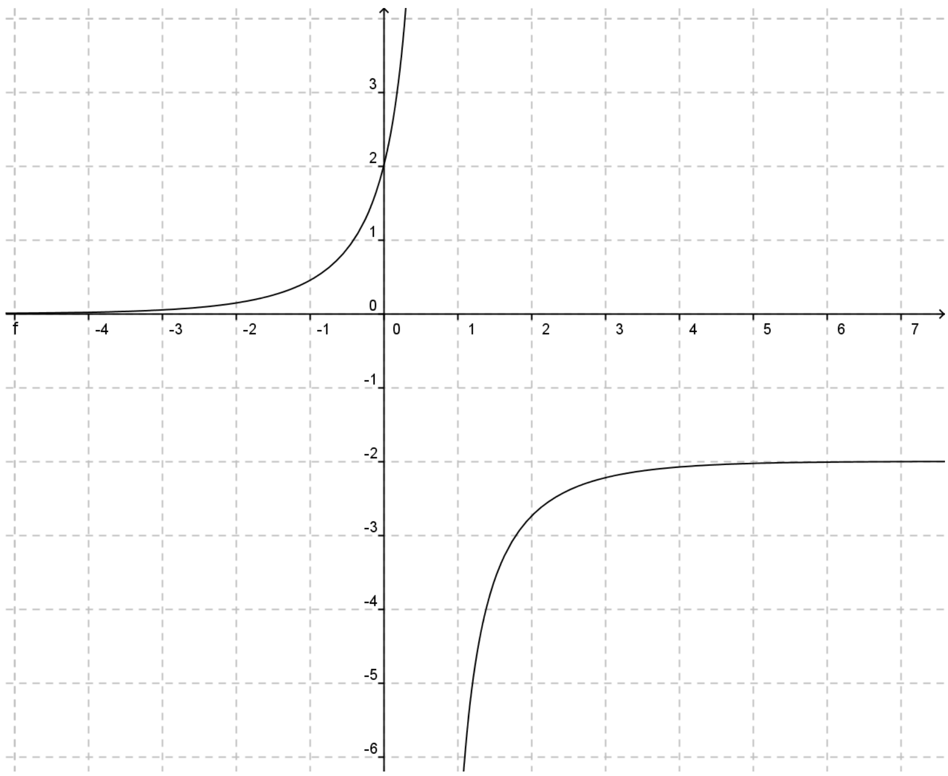
$\lim_{x \to \ln 2^-} f(x) = +\infty$

c) $f'(x) = \frac{2e^x \cdot (2-e^x) + e^x \cdot 2e^x}{(2-e^x)^2} = \frac{4e^x - 2e^{2x} + 2e^{2x}}{(2-e^x)^2} = \frac{4e^x}{(2-e^x)^2} > 0$

f(x) ist in seinen Teilabschnitten streng monoton steigend.

$W_f = \mathbb{R} \setminus [-2; 0]$

d)



2 a) $$F(x)=\ln\left(\frac{1}{(2-e^x)^2}\right)=\ln\left((2-e^x)^{-2}\right)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(2-e^x)^{-2}}\cdot(-2)\cdot(2-e^x)^{-3}\cdot(-e^x)=\frac{(2-e^x)^2}{(2-e^x)^3}\cdot(-2)\cdot(-e^x)=\frac{2e^x}{2-e^x}$$ ☺

b) $$I(x)=F(x)-F(0)=\ln\left(\frac{1}{(2-e^x)^2}\right)-0=\ln\left(\frac{1}{(2-e^x)^2}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} I(x)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)=-1{,}39$$

Der Flächeninhalt, den der Graph im zweiten Quadranten mit der x-Achse einschließt ist endlich.

3 a) f(x) nimmt jeden y-Wert aus dem Wertebereich höchstens einmal an, da die Wertemengen der Teilbereiche sich nicht überschneiden und f(x) in jedem Teilbereich streng monoton steigend ist.

$y=f(x)$ y mit x vertauschen, nach y auflösen.

$$x=\frac{2e^y}{(2-e^y)}$$

$$x\cdot(2-e^y)=2e^y$$

$$2\text{x}-xe^y-2e^y=0$$

$$-e^y(x+2)=-2x$$

$$e^y=\frac{2\text{x}}{x+2}$$

$$y=\ln\left(\frac{2\text{x}}{x+2}\right)$$