Abiturprüfung 1984 (Bayern)
Mathematik
als Grundkursfach

G1. Infinitesimalrechnung

I

Gegeben ist die Funktion $f: \quad x \mapsto \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1 a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f und ermitteln Sie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_f. 4 BE

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.
Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f. 6 BE

c) Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente des Graphen G_f auf.
[Zwischenergebnis: $f''(x) = \frac{12}{x^3} - \frac{18}{x^4}$] 8 BE

d) Zeichnen Sie nun G_f im Bereich [-4 ; 4] unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse (auch die Wendetangente eintragen!) und einiger geeigneter Funktionswerte. (Längeneinheit 1 cm) 6 BE

2 Nun sei die Funktion $g: \quad x \mapsto \frac{3}{x}$ mit $D_g = \mathbb{R}^+$ gegeben.

a) Zeichnen Sie den Graphen G_g dieser Funktion in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d ein. 2 BE

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von b die Flächenmaßzahl der Figur, die von den beiden Graphen G_f und G_g und der Geraden $x = b$ mit $b > 1$ eingeschlossen wird. Zeigen Sie anschließend, daß diese Flächenmaßzahl für wachsendes b nach oben nicht beschränkt ist. 6 BE

3 Die Einschränkung der Funktion f auf $D =]0 ; 1]$ ist die Funktion h. Die Funktion $h^{-1}: \quad x \mapsto y$ sei die Umkehrfunktion von h; ihr Graph sei $G_{h^{-1}}$. Zeichnen Sie den Graphen $G_{h^{-1}}$ in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 1d ein. Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von h^{-1} in dessen Schnittpunkt mit der y-Achse auf, ohne den Funktionsterm von h^{-1} zu verwenden. 8 BE

II.

Gegeben ist die Funktion $f: \quad x \longmapsto \ln \frac{x-1}{2x}$ mit dem maximalen Definitionsbereich D_f. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1 a) Zeigen Sie, daß $D_f = \mathbb{R} \setminus [0\,;\,1]$ ist und daß die Geraden mit den Gleichungen $x = 0$, $x = 1$ und $y = -\ln 2$ Asymptoten von G_f sind. 9 BE

b) Beweisen Sie, daß der Graph G_f weder Extrempunkte noch Wendepunkte besitzt.

[Zwischenergebnis: $f'(x) = \frac{1}{x^2 - x}$]

6 BE

c) Ermitteln Sie die Wertemenge W_f und die Nullstellen der Funktion f. 4 BE

d) Zeichnen Sie G_f auf Grund der bisherigen Ergebnisse und mit Hilfe einiger weiterer Funktionswerte. (Längeneinheit 1 cm) 4 BE

2 a) Zeigen Sie, daß $F: \; x \longmapsto x \cdot f(x) - \ln |x-1|$ mit $D_F = D_f$ eine Stammfunktion von f ist. 4 BE

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von u die Flächenmaßzahl der Figur, die von der x-Achse, dem Graphen G_f und den Geraden $x = 2$ und $x = u$ (mit $u > 2$) eingeschlossen wird. 6 BE

3 Die Umkehrfunktion von f sei f^{-1}; ihr Graph sei $G_{f^{-1}}$.
Ermitteln Sie den Funktionsterm $f^{-1}(x)$, den Definitionsbereich $D_{f^{-1}}$ und die Wertemenge $W_{f^{-1}}$ der Funktion f^{-1}. 7 BE

G2. Analytische Geometrie

III.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in R$ sowie die Punkte A (1 | 2 | 1), B (0 | -2 | 10) und C (3 | -4 | 4) gegeben.

1 a) Zeigen Sie, daß der Punkt A auf der Geraden g liegt. 1 BE

b) Die Punkte B und C bestimmen die Gerade h. Zeigen Sie, daß g und h zwei verschiedene parallele Geraden sind. 5 BE

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der von g und h aufgespannten Ebene E in Parameter- und Normalenform.
[Mögliches Teilergebnis: E: $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 14 = 0$] 6 BE

d) Weiter ist die Ebene $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in R$ gegeben. Berechnen Sie den Abstand eines allgemeinen Punktes P (p_1 | p_2 | p_3) der Ebene F von der Ebene E. Welche Folgerung läßt sich aus dem Ergebnis hinsichtlich der gegenseitigen Lage von E und F ziehen? 9 BE

2 a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch A, die auf der Ebene E (siehe Teilaufgabe 1c) senkrecht steht. In welchem Punkt D schneidet diese Lotgerade die Ebene F (siehe Teilaufgabe 1d) ?
[Teilergebnis: D(-5| -1 | -1)] 7 BE

b) Welchen spitzen Winkel schließen die Geraden DA und DC ein? 4 BE

3 Die Gerade h (siehe Teilaufgabe 1b) schneidet die x_1x_3-Koordinatenebene im Punkt T. Bestimmen Sie die Koordinaten von T. In welchem Verhältnis teilt T die Strecke [BC]? Welcher der drei Punkte B, C, T liegt zwischen den beiden anderen? 8 BE

IV.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in R$ und

die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in R$ gegeben.

1 a) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform auf.
[Mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 12 = 0$] 3 BE

b) Weisen Sie nach, daß die Gerade g auf der Ebene E senkrecht steht.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S von g und E.
[Ergebnis: S (4 | 2 |0)] 6 BE

2 a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebene E mit der x_1x_2-Koordinatenebene. Begründen Sie, daß der Punkt S (siehe Teilaufgabe 1b) dieser Geraden s angehören muß. 6 BE

b) Welchen Winkel schließen die Geraden g und s miteinander ein? 3 BE

c) Welchen spitzen Winkel schließt der Richtungsvektor der Geraden g mit einem Normalenvektor der x_1x_2-Koordinatenebene ein? 3 BE

3 a) Zwei Punkte P und Q auf der Geraden g liegen bezüglich der Ebene E symmetrisch und haben die Entfernung PQ = 12.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P und Q.
[Ergebnis: P(8| 6 |-2); Q(0| -2 |2)]
10 BE

b) Die Gerade p hat den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und geht durch den Punkt P.

Zeigen Sie, daß p zur Ebene E parallel verläuft.
Wie lautet eine Gleichung der Geraden q, die zur Geraden p symmetrisch bezüglich der Ebene E ist?
9 BE

G3. Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik

V.

In einer Urne befinden sich 2 blaue und 6 weiße Kugeln. Die Kugeln unterscheiden sich nur durch ihre Farbe.

1 Bei einem Zufallsexperiment wird eine Kugel gezogen, ihre Farbe notiert und die Kugel in die Urne zurückgemischt. Dieses Verfahren wird insgesamt sechsmal durchgeführt.

Als Ergebnisraum eignet sich eine Menge von 6-Tupeln.

a) Berechnen Sie Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
$A :=$ "Die letzte Kugel ist blau",
$B :=$ "Die erste und die letzte Kugel ist blau". 7 BE

b) Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{B}$ in der Umgangssprache und geben Sie $P(A \cap \overline{B})$ an. 7 BE

2 Wie oft müßte man aus obiger Urne mit Zurücklegen mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,5% mindestens eine blaue Kugel zu erhalten? 5 BE

3 Nun wird das Ziehungsverfahren abgeändert: Nach dem ersten Zug wird nicht nur die gezogene Kugel selbst, sondern noch eine weitere Kugel der gleichen Farbe in die Urne gelegt. Anschließend wird beim zweiten Zug genauso wie beim ersten Zug verfahren, so daß am Ende des experiments 10 Kugeln in der Urne liegen.

a) Geben Sie (z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms) alle möglichen Urneninhalte am Ende des Experiments an. 5 BE

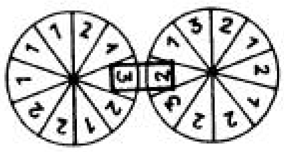
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß sich nach Beendigung des Experiments 3 blaue und 7 weiße Kugeln in der Urne befinden. 5 BE

c) Sind die Ereignisse $E_1 :=$ "Die erste gezogene Kugel ist blau" und $E_2 :=$ "Die zweite gezogene Kugel ist weiß" unabhängig?
Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung. 5 BE

4 Nun hat jemand eine Urne vor sich, von der er annimmt, daß sich 3 blaue und 7 weiße Kugeln darin befinden. Er zieht 50 mal mit Zurücklegen und glaubt seine Annahme nur dann bestätigt, wenn er mindestens 11, aber nicht mehr als 19 blaue Kugeln erhält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er seine wahre Annahme fälschlicherweise verwirft? 6 BE

VI.

In einem Spielautomaten sind zwei Glücksräder nebeneinander montiert. Jedes Rad ist in 10 gleich große Sektoren eingeteilt. In jedem Sektor steht eine Ziffer. Diese Ziffern sind in der Abbildung zu erkennen.



Beide Glücksräder werden gedreht. Wenn sie zum Stillstand kommen, erscheint als Ergebnis im Sichtfenster eine zweistellige Zahl, deren Zehnerziffer vom linken und deren Einerziffer vom rechten Glücksrad stammt. Jeder Sektor erscheint mit gleicher Wahrscheinlichkeit im Sichtfenster.

1. a) Bestimmen Sie alle möglichen Ergebnisse mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. 9 BE

   b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse an:
   A : = "Das Ergebnis ist größer als 20",
   B : = "Das Ergebnis ist eine Primzahl",
   C : = "Das Ergebnis enthält genau einmal die Ziffer 2",
   D : = "Das Ergebnis enthält mindestens einmal die Ziffer 1". 6 BE

   c) Beschreiben Sie möglichst einfach die Ereignisse $C \cap D$ und $C \cup D$ in der Umgangssprache und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeiten. 5 BE

2. Bei jedem Spiel mit diesem Spielautomaten ist ein Einsatz von 20 Pf zu zahlen. Wenn die Glückszahl 12 erscheint, wirft der Automat 50 Pf aus; bei anderen Zahlen geschieht nichts.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, von 100 Spielen mindestens 40 zu gewinnen? 6 BE

   b) Wird der Spieler, wenn er häufig genug spielt, insgesamt einen Gewinn oder einen Verlust erleiden? Begründen Sie ihre Antwort. 8 BE

3. Jemand will testen, ob bei dem Spiel von Aufgabe 2 die Gewinnzahl 12 tatsächlich die Wahrscheinlichkeit 0,25 besitzt. Er glaubt, daß dies der Fall ist, wenn er bei 20 Spielen 3, 4, 5, 6 oder 7 mal gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die Gewinnwahrscheinlichkeit 0,25 verwirft, obwohl sie wahr ist? 6 BE

VII.

Bei einem Spiel läuft ein Spieldurchgang folgendermaßen ab: Mit einem gewöhnlichen Laplace-Würfel, der die Augenzahlen 1 bis 6 trägt, und einem Laplace-Farbwürfel, der zwei grüne (g), zwei rote (r) und zwei schwarze (s) Seitenflächen hat, wird gelichzeitig geworfen. Eine Spielmarke wird dann nach folgender Regel bewegt:
Fällt zur Augenzahl x die Farbe grün, so verschiebt man die Spielmarke x Einheiten nach rechts;
fällt zur Augenzahl x die Farbe rot, so bewegt man die Spielmarke x Einheiten nach links;
fällt zur Augenzahl x die Farbe schwarz, so verändert die Spielmarke ihre Stellung nicht.

Als Ergebnisraum für einen Spieldurchgang eignet sich

$$\Omega = \{(1,g); (1,r); (1,s); \ \ldots \ (6,s)\}$$

1. Nun werden drei Spieldurchgänge ausgeführt.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgenden Ereignisse:

   a) A_1: Die Spielmarke wird bei jedem Spieldurchgang nach rechts bewegt. 4 BE
   b) A_2: Die Spielmarke wird um insgesamt 18 Einheiten nach rechts bewegt. 7 BE
   c) A_3: Die Spielmarke ist nach den drei Spieldurchgängen 17 Einheiten vom Ausgangspunkt entfernt. 7 BE

2. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, daß die Spielmarke nach zwei Spieldurchgängen am Ausgangspunkt ist. 9 BE

3. Wie viele Spieldurchgänge sind mindestens notwendig, damit die Spielmarke mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens einmal nach rechts bewegt wird. 6 BE

4. Es taucht ein zweiter Farbwürfel $\overline{L}$ auf, der äußerlich obigem Laplace-Farbwürfel gleicht. Bei Würfel $\overline{L}$ erscheint die Farbe schwarz jedoch mit der Wahrscheinlichkeit 0,25.
   Man würfelt 100 mal mit einem der beiden Farbwürfel und nimmt an, daß Würfel $\overline{L}$ verwendet wurde, wenn höchstens 29 mal schwarz geworfen wird.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man irrtümlicherweise diese Annahme verwirft? 7 BE